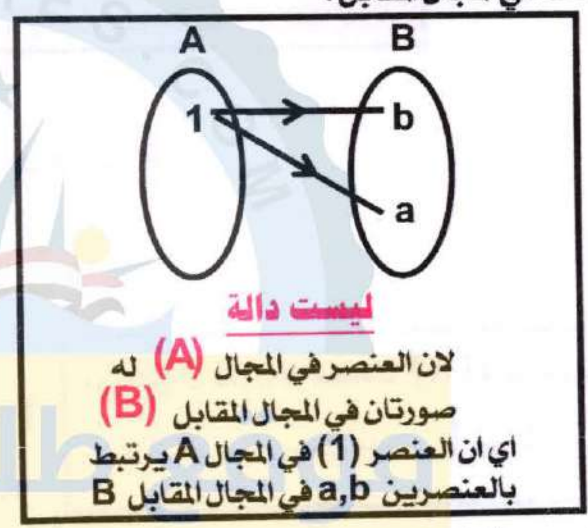
الفصل الاول

الدوال الحقيقية Real Functions

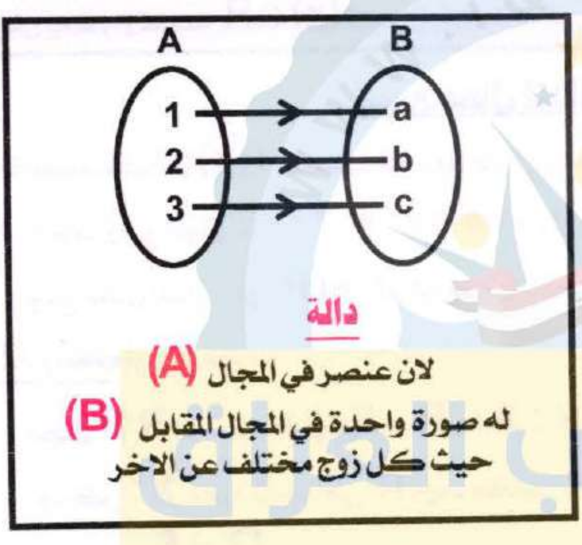
مفهوم الدالة / تعريف

هي علاقة من مجموعة (A) الى المجموعة (B) ، بحيث ان كل عنصر من المجموعة (A) له صورة واحدة فقط في المجموعة (B) ، اي انه كل زوج يظهر لنا مرة واحدة . اي ان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل .



ليست دالة

لان العنصر في المجال (A) له صورتان في المجال المقابل (B)
اي ان العنصر (1) في المجال A يرتبط بالعنصرين a,b في المجال المقابل B



دالة

لان عنصر في المجال (A) له صورة واحدة في المجال المقابل (B) حيث كل زوج مختلف عن الاخر

التعبير الرياضي للدالة /

اذا كونت دالة من مجموعة (A) الى مجموعة (B) ورمزنا لها بالرمز (f) فاننا نكتب ذلك بالصيغة الرمزية الآتية :

$f : A \longrightarrow B$ وتقرا (f) دالة من A الى B

حيث $\forall x \in A$ ، يوجد $y = f(x) \in B$ وحيد [أو $(x,y) \in f$]

حيث يعبر عن الدالة بالصيغة الرمزية الاتية : $f : A \longrightarrow B$

(1) اذا كان الزوج المرتب (x,y) ينتمي الى بيان الدالة f

$f(x)$ حيث (y) هو صورة العنصر (x) تحت تاثير الدالة (f)

(2) تتعين الدالة من ثلاث مكونات . وهي :

(a) **المجـــال/** وتمثله المجموعة (A) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير (x) اذا كان (x,y) ينتمي الى بيان الدالة (f)

(b) **المجال المقابل /** وتمثله المجموعة (B) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير (y) اذا كان (x,y) ينتمي الى بيان الدالة (f)

(C) **قاعدة الدالة f /** هي العلاقة التي تربط عناصر المجموعة (A) بعناصر المجموعة (B) .
اي $y = f(x)$

(3) تعطى قاعدة الدالة باحد الطريقتين الاتيتين :

(a) ذكر بيان الدالة $f : A \longrightarrow B$ وهذا يعني انها تكتب على شكل ازواج مرتبة

$$A = \{ (x , y) : y = f(x) , x \in A \}$$

(b) أو بذكر المعادلة التي تقوم بربط المتغير (x) بالمتغير (y) .

الدوال الحقيقية Real Functions

تسمى الدالة $f : A \longrightarrow B$ دالة حقيقية اذا كان كل من مجالها (A) ومجالها المقابل (B) هما مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الاعداد الحقيقية (R) . حيث $R \subseteq$ المجال المقابل

المجال $= \{ f(x) \in R , \forall x \in R \}$

> أوسع مجال للدالة f في R : هو مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى (A) والتي يكون عندها $f(x) \in R$

أوسع مجال للدالة

أولا / اذا كانت الدالة $f(x)$ كثيرة الحدود فان اوسع مجال للدالة هو R

مثال / أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = 3x^2 + 7$

الحل / أوسع مجال للدالة هو R (لان الدالة كثيرة الحدود)

مثال 2/ (كتاب) اذا كانت $f(x) = x^2$

الحل / مجال $f = \{ x : x \in R , f(x) = x^2 \in R \}$

ولكن x^2 معرفة دوما في R مهما كانت $x \in R$

$\therefore$ مجال $f = R$

> يمكن ان نقول اذا كانت $f(x)$ كثيرة الحدود فان اوسع مجال للدالة f هو R

كيف نتعرف على الدوال الكثيرة الحدود /

(a) مجال الدالة فيها ومجالها المقابل = R (أو مجموعة جزئية من R)

(b) قاعدة الدالة تتكون من حد واحد او عدة حدود

(c) ان أس (X) في اي حد من حدود الدالة يكون عدد حقيقي

حدود الدوال الكثيرة الحدود /

(a) **الدالة الثابتة /** اذا كان $\forall a \in R$ فان $f(a) = a$ ، حيث (a = عدد ثابت)

أمثلة / $f(x) = 17$ ، $f(x) = \sqrt{3}$ ، $f(x) = -8$

(b) **الدالة الخطية /** اذا كان $\forall a , b \in R , a \neq 0$ فان $f(x) = ax + b$ حيث (a , b = عدد ثابت)

ملاحظة/ نلاحظ ان قوة X^1 مرفوعة للقوة واحد . اي ان الدالة هي من الدرجة الاولى ويكون اوسع مجال لها هو R لانها كثيرة حدود.

أمثلة / $f(x) = \sqrt{2X} + 17$ ، $f(x) = 6x + 11$ ، $f(x) = -8$

(c) **الدالة التربيعية /** اذا كان $\forall a , b, c \in R , a \neq 0$ فان $f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث (a , b , c = عدد ثابت)

أمثلة / $f(x) = x^2 - 9$ ، $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

ملاحظة/ نلاحظ ان قوة X^2 مرفوعة للقوة 2. اي ان الدالة هي من الدرجة الثانية لانها كثيرة حدود . فيكون اوسع مجال لها هو مجموعة الاعداد الحقيقية R .

ثانيا / اذا كانت الدالة $f(X)$ كسرية (مكونة من بسط ومقام)
فان اوسع مجال للدالة هو R ما عدا الاعداد التي تجعل المقام = صفر

مثال / جد أوسع مجال للدالة $f(x) = \dfrac{X^2+1}{X^2-5X+6}$

خطوات الحل / نجعل المقام مساويا للصفر $X^2-5X+6=0$

نقوم بتحليل المعادلة بطريقة التجربة $(X-3)(X-2)=0$

ايجاد القيم (X) التي تجعل المقام = صفر

اما $X-3=0 \Rightarrow X=3$

أو $X-2=0 \Rightarrow X=2$

∴ اوسع مجال للدالة f هو $R \setminus \{2,3\}$ ماعدا

مثال 3/ (كتاب) جد مجال الدالة التي قاعدتها $f(x) = \dfrac{X+2}{X-1}$

خطوات الحل / نجعل المقام مساويا للصفر $X-1=0$

$X-1=0 \Rightarrow X=1$

∴ اوسع مجال للدالة f هو $R \setminus \{1\}$ ماعدا

ثالثا / اذا كانت الدالة $f(X)$ تحوي جذر دليله زوجي $\sqrt{2}$ دليل الجذر $\sqrt[2]{X}$
فان اوسع مجال للدالة يستخرج كما يلي :

(a) **الجذر في البسط /** اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله زوجي والجذر في البسط تحديدا ، فان أوسع مجال للدالة هو ان نجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر. كما في المثال :

مثال/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{X+7}$ (دليل الجذر)

الحل / بما ان دليل الجذر زوجي (تربيعي) وبما ان الجذر يقع في البسط ،
اذن نجعل المقدار الذي تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفر $X+7 \ge 0$

$X+7-7 \ge 0-7$

$X+\cancel{7}-\cancel{7} \ge -7$

$X \ge -7$

اي ان مجال $f = \{x : x \in R ,\ X \ge -7\}$

مثال 1/ (كتاب) أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{X}$

الحل / بما ان دليل الجذر زوجي (تربيعي) وبما ان الجذر يقع في البسط ، اذن $X \ge 0$

مجال $f = \{x : x \in R ,\ x \ge 0\}$ تكون معرفة في R اذا كان $X \ge 0$

اي ان مجال $f = \{x : x \in R ,\ x \ge 0\}$

(b) الجذر في المقام / اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله زوجي والجذر يقع في المقام تحديدا ، فان أوسع أوسع مجال للدالة هو ان نجعل المقدار الذي تحت الجذر فقط اكبر من الصفر .

مثال/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+6}}$

الحل / بما ان دليل الجذر زوجي (تربيعي)

وبما ان الجذر يقع في المقام ، اذن $3x + 6 > 0$

$$3x > -6 \rightarrow \frac{3x}{3} > \frac{-6}{3} \rightarrow x > -2$$

اي ان مجال $f = \{x : x \in R , x > -2\}$

رابعا / اذا كانت الدالة $f(x)$ تحتوي على جذر دليله فردي

فان اوسع مجال للدالة يستخرج كما يلي :

(a) الجذر في البسط / اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله فردي والجذر في البسط تحديدا ، فان أوسع مجال للدالة هو R

دليل الجذر

مثال/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt[5]{x-4}$

الحل / بما ان دليل الجذر (فردي)

وبما ان الجذر يقع في البسط ، اذن أوسع مجال للدالة هو R

(b) الجذر في المقام / اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله فردي والجذر يقع في المقام تحديدا ، فان أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الاعداد التي تجعل القيم التي تحت الجذر (تساوي صفر) فقط لان الجذر الذي دليله فردي يمكن حله سواء كانت القيم التي تحت الجذر سالبة أو موجبة فهي تنتمي الى R

مثال/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-5}}$

الحل / بما ان دليل الجذر فردي (مرفوع للقوة ثلاثة)

وبما ان الجذر يقع في المقام ، اذن نجعل ما تحت الجذر = صفر $x - 5 = 0$

$x = 5$

$\therefore$ مجال $f = R / \{5\}$

التمثيل البياني للدوال الحقيقية

تعريف / اذا كان $f : R \longrightarrow R$ دالة ، يعرف منحني الدالة $f(x) = y$ على انه مجموعة النقط $(x , f(x))$ في المستوي الديكارتي

اولا / تمثيل الدالة الخطية

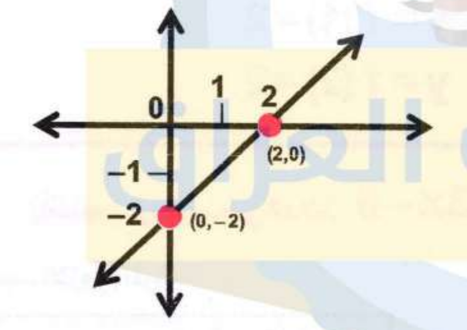
$f : R \longrightarrow R$ دالة ، بحيث $\{f(x) = ax + c \; ; a,c \in R , a \neq 0\}$

منحني الدالة $f(x) = y$ على انه مجموعة النقط $(x , f(x))$ في المستوي الديكارتي

لتمثيل هذه الدالة ناخذ نقطتين (على الاقل) من مجال الدالة ونجد $f(x)$ لكل نقطة ونعين الازواج المرتبة $(x , f(x))$ في المستوي الديكارتي ونصل بين النقطتين بمستقيم .

مثال / مثل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = x - 2$ بيانيا ؟

الحل / ان التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم



x	y	(x,y)
1	–1	(1,–1)
2	0	(2,0)
0	–2	(0,–2)

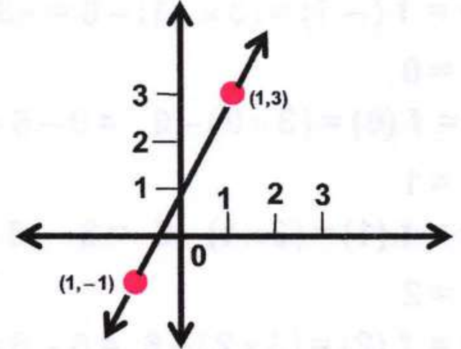
$x = 1 \quad y = f(1) = 1 - 2 = -1$

$x = 2 \quad y = f(2) = 2 - 2 = 0$

وعلى ذلك فان الزوجان المرتبان $a(1,-1) , b(2,0)$ ينتميان الى بيان الدالة وتعينان النقطتين (a,b) ويكون المستقيم $\overleftrightarrow{ab}$ هو المستقيم المطلوب

مثال / مثل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 2x + 1$ بيانيا ؟

الحل /



x	y	(x,y)
1	3	(1 , 3)
–1	–1	(–1 , –1)

$x = 1$

$y = f(1) = (2 \times 1) + 1 = 2 + 1 = 3$

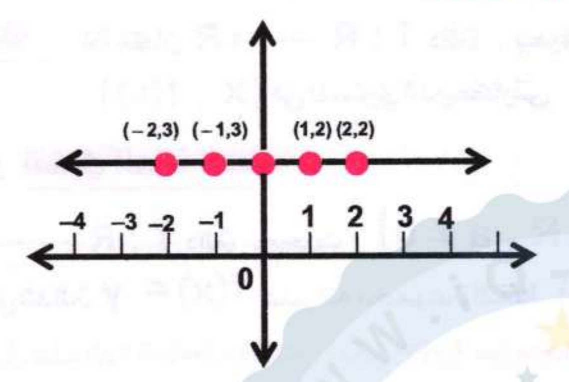
$x = -1$

$y = f(-1) = (2 \times -1) + 1 = -2 + 1 = -1$

مثال / مثل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 2$ بيانيا ؟

الحل /

X	y	(X,y)
−2	2	(−2 , 2)
−1	2	(−1 , 2)
0	2	(0 , 2)
1	2	(1 , 2)
2	2	(2 , 2)



$x = -2 \quad y = f(-2) = 2$

$x = -1 \quad y = f(-1) = 2$

$x = 0 \quad y = f(0) = 2$

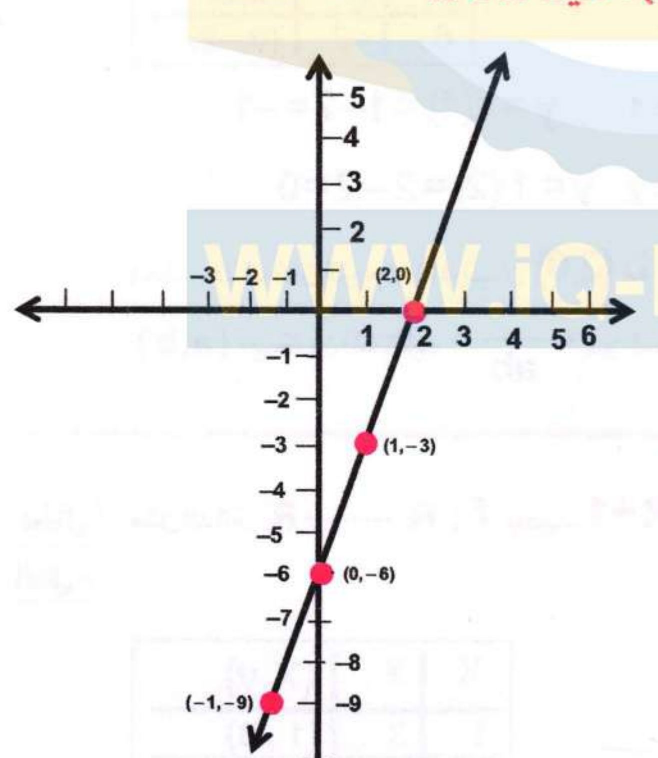
$x = 1 \quad y = f(1) = 2$

$x = 2 \quad y = f(2) = 2$

مثال 4/ **(كتاب)** ارسم منحني الدالة $f(x) = 3X - 6$ حيث $X \in R$

الحل / نجد الازواج المرتبة

X	y	(X,y)
−2	−12	(−2 , −12)
−1	−9	(−1 , −9)
0	−6	(0 , −6)
1	−3	(1 , −3)
2	0	(2 ,0)



$X = -2$
$y = f(-2) = (3 \times -2) - 6 = -6 - 6 = -12$

$X = -1$
$y = f(-1) = (3 \times -1) - 6 = -3 - 6 = -9$

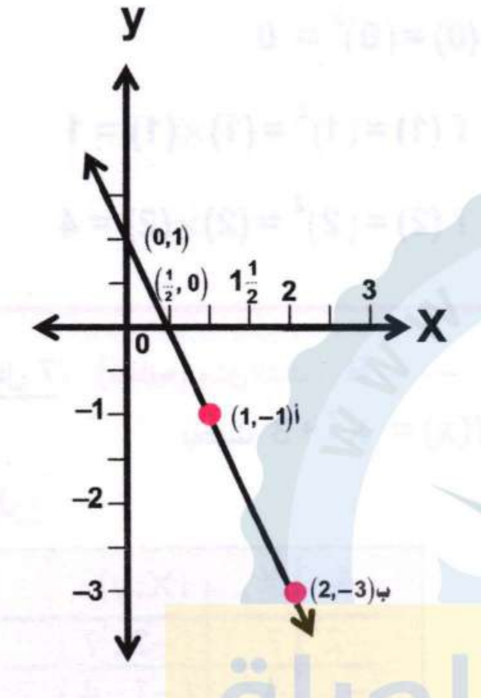
$X = 0$
$y = f(0) = (3 \times 0) - 6 = 0 - 6 = -6$

$X = 1$
$y = f(1) = (3 \times 1) - 6 = 3 - 6 = -3$

$X = 2$
$y = f(2) = (3 \times 2) - 6 = 6 - 6 = 0$

مثال 5/ (كتاب) مثل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x)=1-2X$ بيانيا ؟

الحل / ان التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم



X	y	(X,y)
0	1	(0 , 1)
$\frac{1}{2}$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$
1	−1	(1 , −1)
2	−3	(2 , −3)

$X = 0 \quad y = f(0) = 1-(2\times 0) = 1-0 = 1$

$X = \frac{1}{2} \quad y = f(\frac{1}{2}) = 1-\left(2\times\frac{1}{2}\right) = 1-1 = 0$

$X = 1 \quad y = f(1) = 1-(2\times 1) = 1-2 = -1$

$X = 2 \quad y = f(2) = 1-(2\times 2) = 1-4 = -3$

وعلى ذلك فالزوجان المرتبان أ (1,−1) ، ب (2,−3) ينتميان الى بيان الدالة وتعينان النقطتين أ ، ب ويكون المستقيم أ ب هو المستقيم المطلوب

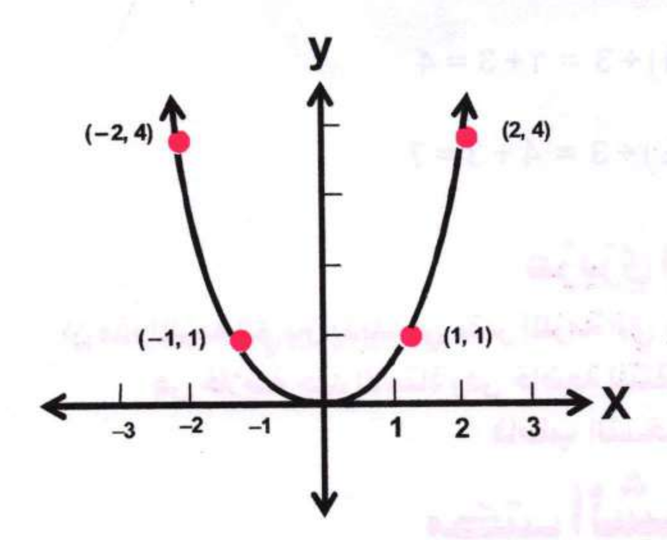
ثانيا / التمثيل البياني للدالة التربيعية

لتمثيل مثل هذه الدوال ناخذ خمس قيم على الاقل لـ (X) من مجال الدالة ونجد f(X) لكل منها لاستخدام قاعدة التعريف التالية

$f : R \longrightarrow R$ دالة ، بحيث $\{f(x) = ax^2 + b \; ; a,b \in R , a \neq 0\}$ وهي تمثل منحنيا

مثال 6/ (كتاب) مثل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = X^2$ بيانيا

الحل /



X	y	(X,y)
−2	4	(−2 , 4)
−1	1	(−1 , 1)
0	0	(0 , 0)
1	1	(1 , 1)
2	4	(2 ,4)

$X = -2$

$y = f(-2) = (-2)^2 = (2)\times(2) = 4$

$x = -1 \quad y = f(-1) = (-1)^2 = (1)\times(1) = 1$

$x = 0 \quad y = f(0) = (0)^2 = 0$

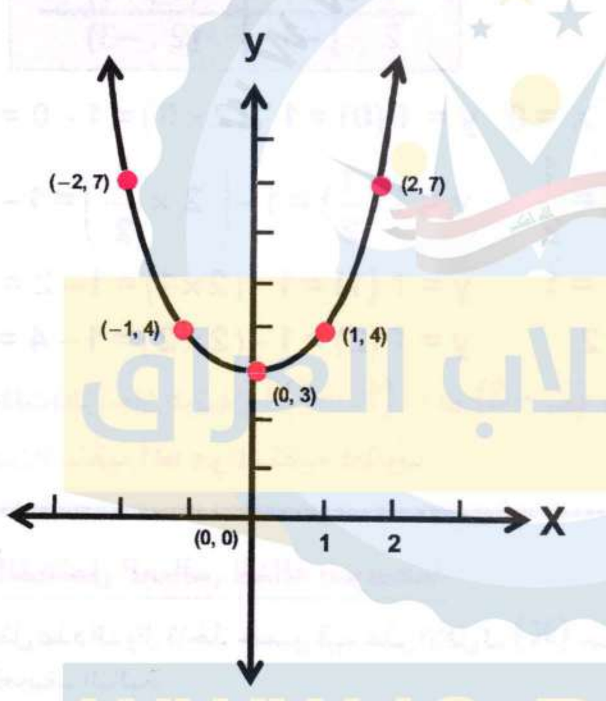
$x = 1 \quad y = f(1) = (1)^2 = (1)\times(1) = 1$

$x = 2 \quad y = f(2) = (2)^2 = (2)\times(2) = 4$

مثال 7/ **(كتاب)** مثل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = x^2 + 3$ بيانيا

الحل /

X	y	(X,y)
−2	7	(−2 , 7)
−1	4	(−1 , 4)
0	0	(0 , 3)
1	4	(1 , 4)
2	7	(2 , 7)



$x = -2$

$y = f(-2) = (-2)^2 + 3$

$= (-2\times -2) + 3 = 4 + 3 = 7$

$x = -1 \quad y = f(-1) = (-1)^2 + 3 = (-1\times -1) + 3 = 1 + 3 = 4$

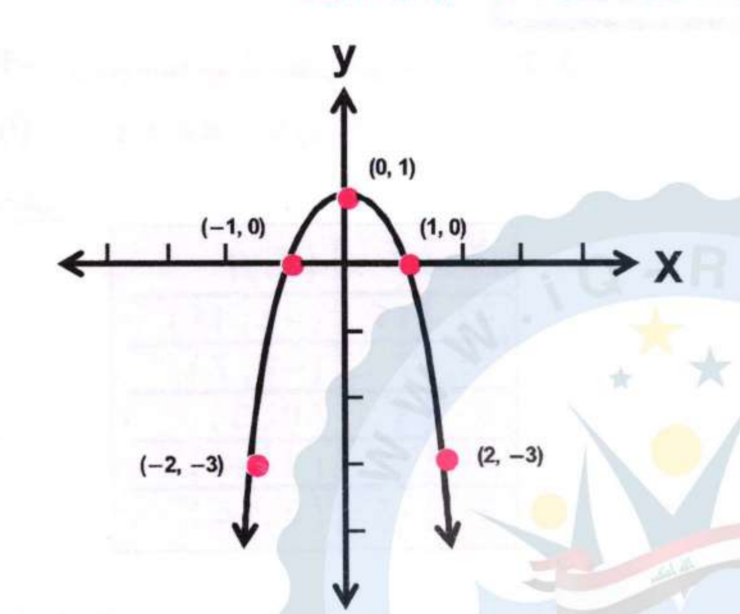
$x = 0 \quad y = f(0) = (0)^2 + 3 = (0) + 3 = 3$

$x = 1 \quad y = f(1) = (1)^2 + 3 = (1\times 1) + 3 = 1 + 3 = 4$

$x = 2 \quad y = f(2) = (2)^2 + 3 = (2\times 2) + 3 = 4 + 3 = 7$

مثال 8/ **(كتاب)** مثل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 1 - X^2$ بيانيا

الحل /



X	y	(X,y)
−2	−3	(−2 , −3)
−1	0	(−1 , 0)
0	1	(0 , 1)
1	0	(1 , 0)
2	−3	(2 , −3)

$x = -2$

$y = f(-2) = 1 - (-2)^2$

$= 1 - (-2 \times -2) = 1 - 4 = -3$

$x = -1$

$y = f(-1) = 1 - (-1)^2 = 1 - (-1 \times -1) = 1 - 1 = 0$

$x = 0 \quad y = f(0) = 1 - (0)^2 = 1 - 0 = 1$

$x = 1 \quad y = f(1) = 1 - (1)^2 = 1 - (1 \times 1) = 1 - 1 = 0$

$x = 2 \quad y = f(2) = 1 - (2)^2 = 1 - (2 \times 2) = 1 - 4 = -3$

مثال (اثرائي) أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = 7 + \frac{5}{x}$

الحل / أوسع مجال للدالة : نجعل مقام الكسر = صفر

∴ أوسع مجال للدالة $R / \{0\}$ ∵

مثال (اثرائي) أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = X^4 + 7X^2 - 5$

الحل / المجال $= \{ f(x) \in R , \forall x \in R \}$

∴ أوسع مجال للدالة هو R لانها دالة كثيرة حدود .

تمارين (1-1)

-1 أرسم منحنيات كل من الدوال الاتية:

(أ) $f(x) = -4X + 3$

الحل /

X	y	(X,y)
−2	11	(−2 , 11)
−1	7	(−1 , 7)
0	3	(0 , 3)
1	−1	(1 , −1)
2	−5	(2 , −5)

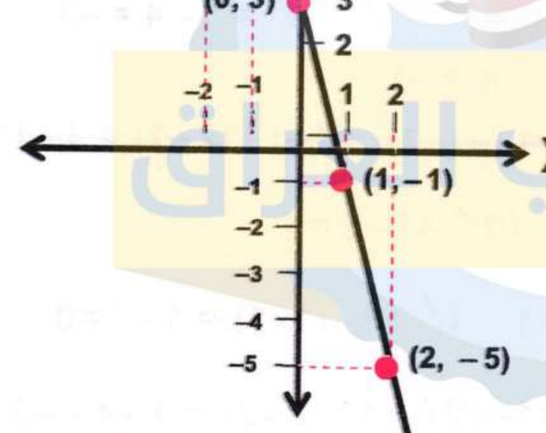
$X = -2$
$y = f(-2) = -4 \times (-2) + 3 = 8 + 3 = 11$

$X = -1$
$y = f(-1) = -4 \times (-1) + 3 = 4 + 3 = 7$

$X = 0$
$y = f(0) = -4 \times (0) + 3 = 0 + 3 = 3$

$X = 1$
$y = f(1) = -4 \times (1) + 3 = -4 + 3 = -1$

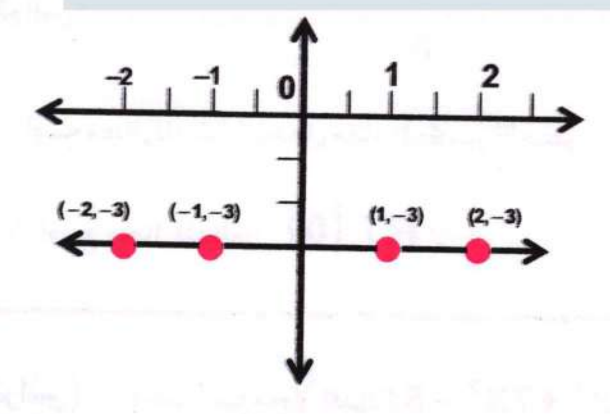
$X = 2$
$y = f(2) = -4 \times (2) + 3 = -8 + 3 = -5$



(ب) $f(x) = -3$

الحل /

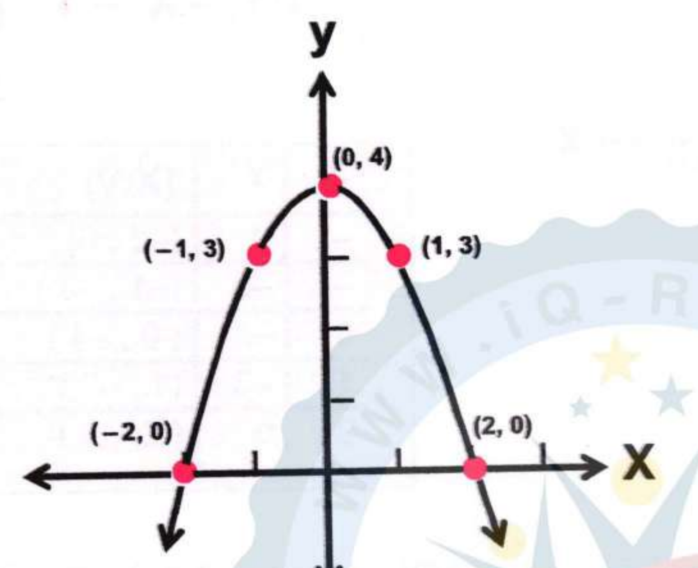
X	y	(X,y)
−2	−3	(−2 , −3)
−1	−3	(−1 , −3)
0	−3	(0 , −3)
1	−3	(1 , −3)
2	−3	(2 , −3)



$X = -2 \quad y = f(-2) = -3$
$X = -1 \quad y = f(-1) = -3$
$X = 0 \quad y = f(0) = -3$
$X = 1 \quad y = f(1) = -3$
$X = 2 \quad y = f(2) = -3$

ج) $f(x) = 4 - x^2$

الحل /



x	y	(x,y)
−2	0	(−2 , 0)
−1	3	(−1 , 3)
0	4	(0 , 4)
1	3	(1 , 3)
2	0	(2 , 0)

$x = -2$
$y = f(-2) = 4 - (-2)^2$
$= 4 - (-2 \times -2) = 4 - 4 = 0$

$x = -1 \quad y = f(-1) = 1 - (-1)^2 = 4 - (-1 \times -1) = 4 - 1 = 3$

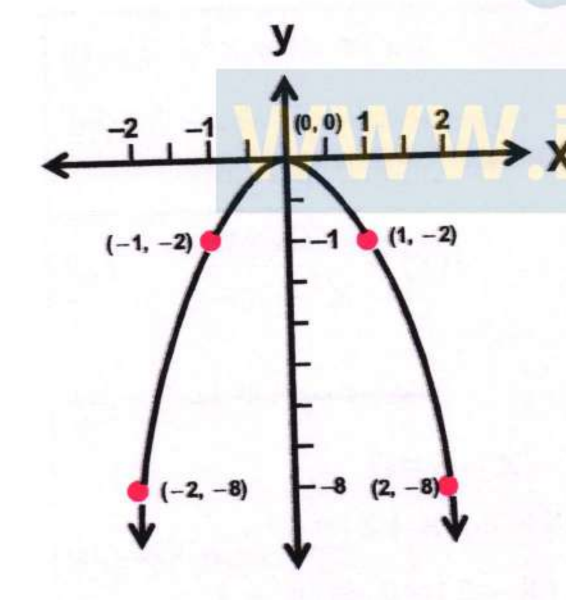
$x = 0 \quad y = f(0) = 4 - (0)^2 = 1 - 0 = 4$

$x = 1 \quad y = f(1) = 4 - (1)^2 = 4 - (1 \times 1) = 4 - 1 = 3$

$x = 2 \quad y = f(2) = 4 - (2)^2 = 4 - (2 \times 2) = 4 - 4 = 0$

د) $f(x) = -2x^2$

الحل /



x	y	(x,y)
−2	−8	(−2 , −8)
−1	−2	(−1 , −2)
0	0	(0 , 0)
1	−2	(1 , −2)
2	−8	(2 , −8)

$x = -2 \quad y = f(-2) = -2 \times (-2)^2$
$= -2(-2 \times -2) = -2 \times 4 = -8$

$x = -1 \quad y = f(-1) = 1 - (-1)^2 = -2(-1 \times -1) = -2 \times (1) = -2$

$x = 0 \quad y = f(0) = -2 \times (0)^2 = -2 \times (0)^2 = 0$

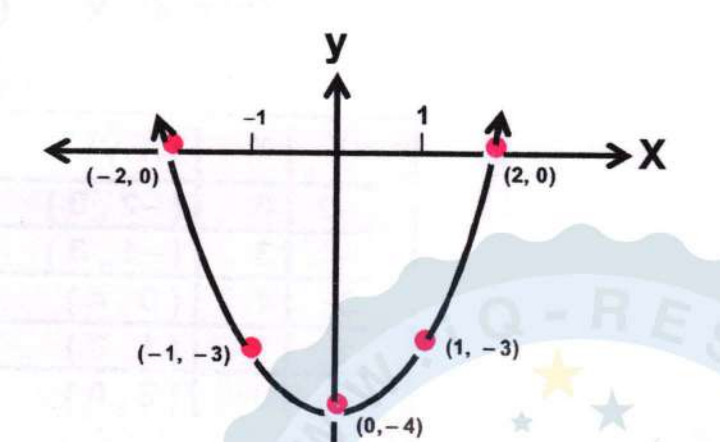
$x = 1 \quad y = f(1) = -2 \times (1)^2 = -2 \times (1 \times 1) = -2 \times (1) = -2$

$x = 2 \quad y = f(2) = -2 \times (2)^2 = -2 \times (2 \times 2) = -2 \times (4) = -8$

(هـ) $f(x) = X^2 - 4$

الحل /

X	y	(X,y)
−2	0	(−2 , 0)
−1	−3	(−1 , −3)
0	−4	(0 , −4)
1	−3	(1 , −3)
2	0	(2 , 0)



$X = -2 \quad y = f(-2) = (-2)^2 - 4 = (-2\times-2) - 4 = 4 - 4 = 0$

$X = -1 \quad y = f(-1) = (-1)^2 - 4 = (-1\times-1) - 4 = 1 - 4 = -3$

$X = 0 \quad y = f(0) = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$

$X = 1 \quad y = f(1) = (1)^2 - 4 = (1\times1) - 4 = 1 - 4 = -3$

$X = 2 \quad y = f(2) = (2)^2 - 4 = (2\times2) - 4 = 4 - 4 = 0$

---

2 − جد مجال كل من الدوال التالية

(أ) $f(x) = X^3 + X^2 - 3$

الحل / (بما ان الدالة كثيرة الحدود)

∴ أوسع مجال للدالة هو R

(ب) $f(x) = \dfrac{2X+6}{X^2 - X - 6}$

الحل / نجعل المقام يساوي صفر

$X^2 - X - 6 = 0$

$(X-3)(X+2) = 0$ بطريقة التجربة

اما $(X-3) = 0 \Rightarrow X = 3$

او $(X+2) = 0 \Rightarrow X = -2$

∴ أوسع مجال للدالة هو

$f = R / \{3, -2\}$

(جـ) $f(x) = \sqrt{4 - X}$

الحل / $4 - X \geq 0$

$-4 + 4 - X \geq -4 + 0$

$-X \geq -4$ ضرب الطرفين في (-1)

$X \leq 4$ تقلب العلامة $(\geq)$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , X \leq 4\}$

(د) $f(x) = \sqrt{X + 2}$

الحل / $X + 2 \geq 0$

$X + 2 - 2 \geq +0 - 2$

$X \geq -2$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , X \geq -2\}$

3 - ليكن $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = y = x + 1$

جد $f(-3), f(2), f[f(-1)], f(1+\Delta X), f(a+2), f(b-3)$

الحل /

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(1+\Delta X) = 1 + \Delta X + 1 = \Delta X + 2$

$f(b-3) = b - 3 + 1 = b - 2$

$f(-3) = -3 + 1 = -2$

$f[f(-1)] = f[(-1+1)] = f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(a+2) = a + 2 + 1 = a + 3$

اثرائيات

(أ) $f(x) = \dfrac{X-3}{X^2 - 7X + 12}$

الحل / نجعل المقام يساوي صفر

$X^2 - 7X + 12 = 0$

$(X-3)(X-4) = 0$ بطريقة التجربة

اما $(X-3) = 0 \Rightarrow X = 3$

او $(X-4) = 0 \Rightarrow X = 4$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \{3,4\}$

(ب) $f(x) = \sqrt{X+4}$

الحل / $X + 4 \geq 0$

$X + 4 - 4 \geq 0 - 4$

$X \geq -4$

∴ أوسع مجال للدالة هو

$\{x : x \in R , X \geq -4\}$

(جـ) $f(x) = \dfrac{X^2 - 9}{2X - 6}$

الحل / $2X - 6 = 0$

$(X-3) = 0 \Rightarrow X = 3$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \{3\}$

(د) $f(x) = \sqrt{5+X}$

الحل / $5 + X \geq 0$

$-5 + 5 + X \geq 0 - 5 \Rightarrow X \geq -5$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , X \geq -5\}$

(هـ) $f(x) = \dfrac{2X+1}{6X^2 + 11X + 4}$

الحل / $6X^2 + 11X + 4 = 0$

$(3X+4)(2X+1) = 0$ بطريقة التجربة

اما $(3X+4) = 0 \Rightarrow X = \dfrac{-4}{3}$

او $(2X+1) = 0 \Rightarrow X = \dfrac{-1}{2}$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \left\{\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-3}{4}\right\}$

(و) $f(x) = \dfrac{2X-3}{2X^2 + 7X - 15}$

الحل / $2X^2 + 7X - 15 = 0$

$(2X-3)(X+5) = 0$ بطريقة التجربة

اما $(2X-3) = 0 \Rightarrow X = \dfrac{3}{2}$

او $(X+5) = 0 \Rightarrow X = -5$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \left\{-5, \dfrac{3}{2}\right\}$

التغير Variation

اولا / التغير الطردي

تعريف / اذا كان y , x متغيرين ،
وان K عددا ثابتا موجبا وكان $y = Kx$
فاننا نقول y تتغير طرديا تبعا لـ (x)
وتكتب بالصيغة التالية $\boxed{y \propto x}$
وتقرأ y تتناسب طرديا مع x

من التعريف نستنتج /

اذا كان $y \propto x$ واخذ المتغير (x) القيمتين x_1 , x_2
وتبعا لذلك اخذ الـ y القيمتين y_1 , y_2 على الترتيب

فان / $\boxed{\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}}$ أو $\boxed{\dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_1}{x_1}}$

اما اذا كان $\dfrac{y_1}{x_1} \neq \dfrac{y_2}{x_2}$
العلاقة بين y , x ليست علاقة تغير طردي

مثال 9/ (كتاب) اذا كان y يتغير طرديا تبعا لـ (x) وكان $y = 15$ عندما يكون $x = 7$
فجد قيمة x عندما يكون $y = 30$

الحل /

الطريقة الاولى	الطريقة الثانية
$y \propto x$ (نحذف علامة $\propto$ ونضع بدلها الثابت $K=$)	$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$
$y = Kx$	$\frac{7}{x_2} = \frac{15}{30}$
$15 = K(7)$	$15 \times x_2 = 7 \times 30$
$K = \frac{15}{7}$	$x_2 = \frac{7 \times 30}{15} = 14$
$y = \frac{15}{7}x$	
$x = \frac{y}{\frac{15}{7}} = \frac{30}{\frac{15}{7}} = \frac{7}{15} \times 30 = 14$	
∴ العلاقة بين y , x علاقة تغير طردي	∴ العلاقة بين y , x علاقة تغير طردي

مثال 10/ (كتاب) y , X متغيران حقيقيان مرتبطان لعلاقة ما ، فان اخذت X القيمتين 1.6 , 5 وكانت قيمتا y المناظرتين لقيمتي X هما 4.8 , 15 فهل العلاقة بين y , X علاقة تغير طردي ؟

خطوات الحل

أولا- نلاحظ من السؤال ان X اخذت القيمتين 1.6 , 5 اذن $X_1 = 1.6$ ، $X_2 = 5$

ونلاحظ من السؤال ان y اخذت القيمتين 4.8 , 15 اذن $y_1 = 4.8$ ، $y_2 = 15$

ثانيا – نتذكر القانون اعلاه للتغير الطردي لقيمتين لكل من X و y

$$\frac{y_2}{X_2} = \frac{y_1}{X_1}$$

الحل

$$\because X_1 = 1.6 \, , \, X_2 = 5, \, y_1 = 4.8, \, y_2 = 15$$

القانون $\frac{y_2}{X_2} = \frac{y_1}{X_1}$

الطرف الايمن $= \frac{y_1}{X_1} = \frac{4.8}{1.6} = 3$

الطرف الايسر $= \frac{y_2}{X_2} = \frac{15}{5} = 3$

$\therefore$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

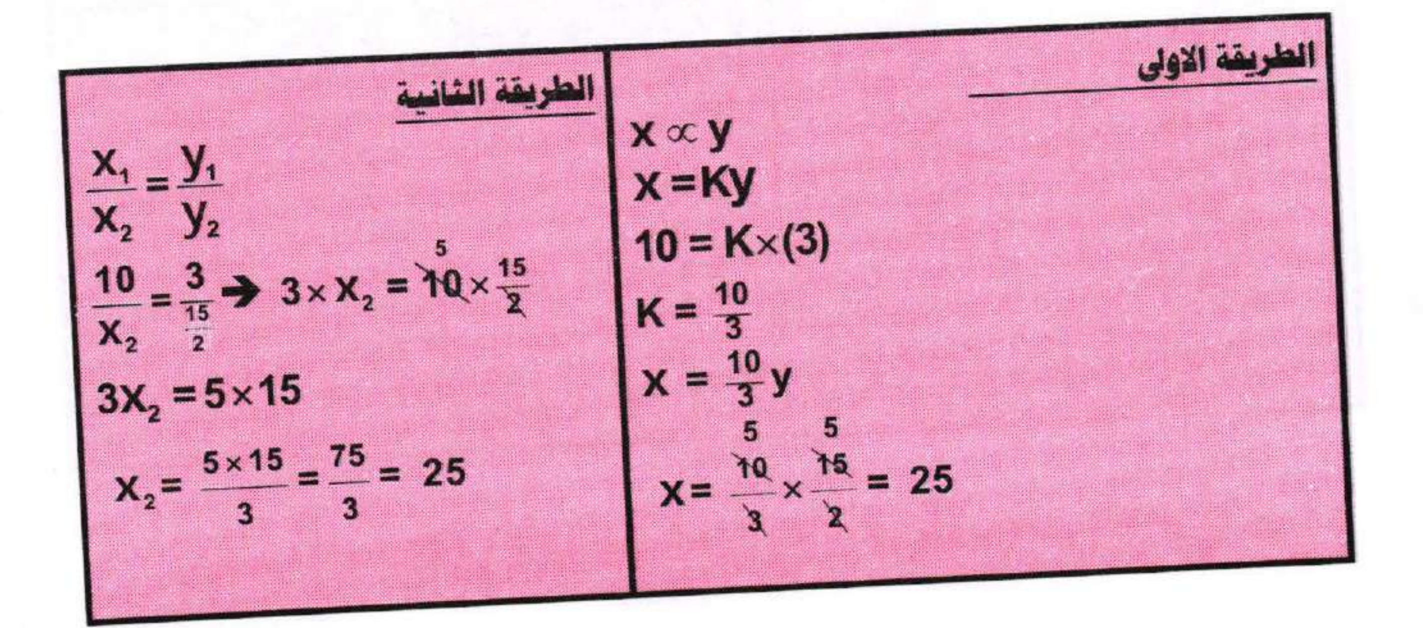
$$\frac{y_2}{X_2} = \frac{y_1}{X_1}$$

$\therefore$ العلاقة بين y , X علاقة تغير طردي

مثال (اثرائي) اذا كان (X) يتغير طرديا تبعا لـ y وكان $X = 10$ عندما يكون $y = 3$ فجد قيمة X عندما يكون $y = \frac{15}{2}$

الحل / هنا التغير التابع هو (X) (التغير المستقل) هو y

اذن $X_1 = 10$ ، $X_2 = ?$ واذن $y_1 = 3$ ، $y_2 = \frac{15}{2}$



الطريقة الاولى

$$X \propto y$$
$$X = Ky$$
$$10 = K \times (3)$$
$$K = \frac{10}{3}$$
$$X = \frac{10}{3} y$$
$$X = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{3}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{2}} = 25$$

الطريقة الثانية

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{y_1}{y_2}$$
$$\frac{10}{X_2} = \frac{3}{\frac{15}{2}} \rightarrow 3 \times X_2 = \overset{5}{\cancel{10}} \times \frac{15}{\cancel{2}}$$
$$3X_2 = 5 \times 15$$
$$X_2 = \frac{5 \times 15}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

ثانيا / التغير العكسي

تعريف / اذا كان y , X متغيرين ،
وان K عددا ثابتا موجبا وكان $y = K\frac{1}{x}$
فاننا نقول y تتغير عكسيا تبعا لـ (X)
وتكتب بالصيغة التالية $y \propto \frac{1}{x}$
وتقرأ y تتناسب عكسيا مع X

$$y \propto \frac{1}{x}$$

y → المتغير التابع
x ↑ المتغير المستقل

من التعريف نستنتج /

اذا كان $y \propto \frac{1}{x}$ واخذ المتغير (X) القيمتين X_1 , X_2
وتبعا لذلك اخذ الـ y القيمتين y_1 , y_2 على الترتيب

فان / $\frac{X_2}{X_1} = \frac{y_1}{y_2}$ او $\frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1}{x_2}$

مثال 11/ (كتاب) y تتغير عكسيا تبعا لـ (X) وكانت $y = 3 , X = 20$
فاوجد قيمة y عندما $X = 6$

الحل / هنا التغير عكسي اذن $X_1 = 20$ ، $X_2 = 6$ واذن $y_1 = 3$ ، $y_2 = ?$

الطريقة الاولى	الطريقة الثانية
$y \propto \frac{1}{x} \rightarrow y = K\frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{K}{x}$ $10 = K\times(3)$ $3 = \frac{k}{20}$ $K = 3\times 20 = 60$ $y = \frac{K}{x} \rightarrow y = \frac{60}{6} = 10$	$\frac{X_2}{X_1} = \frac{y_1}{y_2}$ $\frac{6}{20} = \frac{3}{y_2} \rightarrow 6\times y_2 - = 20\times 3$ $y = \frac{60}{6} = 10$ $x_2 = \frac{20\times 3}{6} = 10$

مثال 12/ (كتاب)

x , y متغيران حقيقيان مرتبطان بعلاقة ما فاذا اخذ المتغيران x , y القيمتين $15 , 21$ على الترتيب وزادت قيمة المتغير x حتى اصبح 35 ونقص تبعا لذلك المتغير y فاصبح 8 هل $y \propto \frac{1}{x}$

الحل / اذن $x_1 = 15$ ، $x_2 = 35$

واذن $y_1 = 21$ ، $y_2 = 8$

المطلوب هل التغير عكسي ام لا $\frac{x_2}{x_1} \overset{?}{=} \frac{y_1}{y_2}$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2} \rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{21}{8}$$

$\therefore$ y لا تتغير عكسيا تبعا لـ x

لان $\frac{x_2}{x_1} \neq \frac{y_1}{y_2}$

مثال 13/ (كتاب)

$x \propto \frac{1}{y}$ ، $y \propto \frac{1}{z}$

فبرهن على ان $y \propto z$

الحل /

$$x \propto \frac{1}{y} \rightarrow x = K\frac{1}{y} \rightarrow x = \frac{K}{y}, k \in R^+$$

$$y \propto \frac{1}{z} \rightarrow y = h\frac{1}{z} \rightarrow y = \frac{h}{z}, h \in R^+$$

$$x = \frac{k}{y} = \frac{k}{\frac{h}{z}}, \frac{k}{y} \in R^+$$

$$x = \frac{kz}{h}$$

$$\therefore x \propto z$$

مثال (اثرائي) اذا تغيرت x طرديا مع $\sqrt{y}$ وعكسيا مع z^2 وكانت $x = 2 , y = 9 , z = 3$ ، فجد قيمة z عندما $x = 4 , y = 36$

الحل /

$$x \propto \frac{\sqrt{y}}{z^2} \rightarrow x = K\frac{\sqrt{y}}{z^2} \rightarrow k = \frac{x \cdot z^2}{\sqrt{y}} \rightarrow k = \frac{2 \cdot (3)^2}{\sqrt{9}} \rightarrow k = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6 \rightarrow \therefore k = 6$$

$$x = K\frac{\sqrt{y}}{z^2} \rightarrow 4 = 6 \times \frac{\sqrt{36}}{z^2} \rightarrow 4 = \frac{6 \times 6}{z^2} \rightarrow 4z^2 = 36 \rightarrow z^2 = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow z = 3$$

ثالثا / التغير المشترك

تعريف / اذا كان x , y , z ثلاث متغيرات فان هنالك احتمالات عدة لهذه المتغيرات :

(أ) (x) تتغير طرديا تبعا لـ (y) وعكسيا تبعا لـ (z)

فتكتب هذه العلاقة $x \propto \frac{y}{z}$ ومنها $x = k\frac{y}{z}$ حيث $K \in R$ عددا ثابتا موجبا

(ب) x تتغير طرديا تبعا لـ y , z

فتكتب هذه العلاقة $x \propto yz$ ومنها $x = kyz$ حيث $K \in R$ عددا ثابتا موجبا

(جـ) x تتغير عكسيا تبعا لـ y , z

فتكتب هذه العلاقة $x \propto \frac{1}{yz}$ ومنها $x = \frac{k}{yz}$ حيث $K \in R$ عددا ثابتا موجبا

مثال 14/ (كتاب)

اذا كانت y تتغير طرديا تبعا لـ z , x وكانت $y = 24$ عندما $x = 3$

جد قيمة x عندما $y = 30 , z = 15$

الحل / اذن $x_1 = 3$ ، $x_2 = ?$

واذن $y_1 = 24$ ، $y_2 = 30$

واذن $Z_1 = 4$ ، $Z_2 = 15$

المطلوب ايجاد قيمة X

$y \propto xz \rightarrow y = kxz , k \in R$

$24 = k(3)(4) \rightarrow \therefore k = 2$

$\therefore y = 2XZ \rightarrow \therefore 30 = 2X(15)$

$\therefore x = 1$

مثال 15/ (كتاب) اذا كان $a \propto b$ برهن على ان $a^2 + b^2 \propto ab$

الحل / $a \propto b , a = kb$

ولكي نثبت ان $a^2+b^2 \propto ab$ يجب ان نثبت ان $a^2+b^2 =$ عدد ثابت $\times ab$

اي ان $K =$ عدد ثابت $= \frac{a^2+b^2}{ab}$

$$\frac{(Kb)^2+b^2}{Kb \times b} = \frac{K^2b^2+b^2}{Kb^2} \rightarrow \frac{b^2(K^2+1)}{Kb^2} = \frac{K^2+1}{K}$$

$$\frac{b^2(K^2+1)}{Kb^2} = \frac{K^2+1}{K} \quad , \quad \frac{K^2+1}{K} = h \in Z^+$$ وبفرض ان

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = h \rightarrow a^2+b^2 = h \cdot (ab)$$

$$\therefore a^2+b^2 \propto ab$$

مثال 16/ (كتاب) اذا كان y تتغير عكسيا مشتركا مع Z , X فاذا كان $y = 7$ عندما $X = 1 , Z = 3$ جد ثابت التغير

الحل / هنا التغير عكسي اذن $x = 1$ ، $y = 7$ ، $z = 3$

$$y \propto \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} \rightarrow y = K\frac{1}{xz} \quad , k \in R^+$$

$$7 = K\frac{1}{(1)(3)}$$

$$K = 21$$

تمارين (2 – 1)

1) اذا كانت y تتغير طرديا مع x وكان $y = 10$ عندما $x = 5$ جد قيمة y عندما $x = 15$

الحل / اذن $x_1 = 5$ ، $x_2 = 15$ واذن $y_1 = 10$ ، $y_2 = ?$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \rightarrow \frac{5}{15} = \frac{10}{y_2}$$

$$5y_2 = 10 \times 15 = 150$$

$$y_2 = \frac{150}{5} = 30$$

2) اذا كانت y تتغير عكسيا مع x وكان $x = 16$ عندما $y = 25$ جد قيمة y عندما $x = 20$

الحل / اذن $x_1 = 16$ ، $x_2 = 20$

واذن $y_1 = 25$ ، $y_2 = ?$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \rightarrow \frac{20}{16} = \frac{25}{y_2}$$

$$20y_2 = 16 \times 25 = 400$$

$$y_2 = \frac{400}{20} = 20$$

3) اذا كانت Z تتغير مشتركا مع x , y وكان $y = 4$ عندما $z = 2$, $x = 1$ جد ثابت التغير

الحل / اذن $x = 1$ ، $y = 4$ ، $z = 2$

$$z \propto xy \ , k \in R$$

$$z = kxy \ , k \in R^+$$ حيث

$$K = \frac{z}{xy} = \frac{2}{1 \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2}$$ قيمة ثابت التغير

4) اذا كانت y تتغير طرديا مع x وعكسيا مع L تغيرا مشتركا فاذا كان $y = \frac{3}{2}$ عندما $x = 2 , L = 4$ جد صيغة رياضية للعلاقة بين y , x , L

الحل / حيث

$$y \propto \frac{x}{L} \rightarrow y = k\frac{x}{L} \ , k \in R^+$$

$$K = \frac{yL}{x} = \frac{\frac{3}{2} \times 4}{2} = 3$$

$$\therefore K = 3$$

$$\therefore y = \frac{3x}{L}$$ العلاقة الرياضية

5) (أ) اذا كانت $x \propto y$ فاثبت $y \propto x$

الحل /

$$x \propto y \rightarrow x = ky \ , k \in R^+$$

$$y = \frac{1}{k}x$$

نفرض ان $\frac{1}{k} = h$

$$y = hx \ , \ \frac{1}{k} = h \in R^+$$

$$\therefore y \propto x$$

(ب) اذا كانت $x \propto y \ , y \propto z$ فاثبت ان $x \propto z$

الحل /

$$x \propto y \rightarrow x = ky \ , k \in R^+$$

$$y \propto z \rightarrow y = hz \ , h \in R^+$$

$$x = khz \ , m = kh \in R^+$$

$$\therefore x \propto z$$

6) اذا كان y ، x متغيرين حقيقين مجموعة التعويض لكل منها R^+ وكان $y \propto x$ فاثبت ان

$$x^3 + y^3 \propto x^2y$$

الحل/ $y \propto x \Rightarrow y = kx \; , k \in R^+$ حيث

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2y} = h \; , \; h \in R^+ \text{ حيث}$$

$$\frac{x^3 + k^3x^3}{x^2kx} = \frac{x^3 + k^3x^3}{kx^3}$$

$$\frac{\cancel{x^3}\left(1+k^3\right)}{k\cancel{x^3}} = \frac{1+k^3}{k}$$

ليكن $\frac{1+k^3}{k} = h \in R^+$

$$\therefore \frac{x^3 + y^3}{x^2y} = h$$

$$x^3 + y^3 = hx^2y$$

$$x^3 + y^3 \propto x^2y$$

7) اذا تغيرت x عكسيا تبع $y-1$ وكانت $x = 24$ عندما $y = 10$ فما قيمة x عندما $y = 5$ ؟

الحل/ اذن $x_2 = ? \; , x_1 = 24$

$y_1 = 10 \; , \; y_2 = 5$

$$x \propto \frac{1}{y-1} \Rightarrow x = \frac{k}{y-1} \; , \; k \in R^+$$

$$24 = \frac{K}{10-1} \Rightarrow K = 24 \times (9) = 216$$

$$\therefore K = 216$$

$$x = \frac{216}{y-1} \Rightarrow x = \frac{216}{5-1} = \frac{216}{4} = 54$$

$$\therefore x = 54$$

8) اذا كان y يتغير عكسيا تبع x فاذا كان $y = 5$ وثابت التغير $= 15$ فجد قيمة x ؟

الحل/

$$y \propto \frac{1}{x} \Rightarrow y = k\frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{K}{y}$$

$$x = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore x = 3$$

مثال (اثرائي)

اذا تغيرت x طرديا مع $\sqrt{y}$ وعكسيا مع z^2 فاذا كانت $x = 2 , y = 9 , z = 3$ جد قيمة z عندما $x = 4 , y = 36$

الحل/ $y \propto \frac{\sqrt{y}}{z^2} \Rightarrow x = k\frac{\sqrt{y}}{z^2}$

$$K = \frac{x \cdot z^2}{\sqrt{y}} \Rightarrow K = \frac{2 \times (3)^2}{\sqrt{9}} = \frac{2 \times 9}{3} = 6$$

$$\therefore k = 6$$

$$x = k \cdot \frac{\sqrt{y}}{z^2}$$

$$4 = 6 \times \frac{\sqrt{36}}{z^2}$$

$$z^2 = \frac{6 \times 6}{4} = \frac{\overset{9}{\cancel{36}}}{\cancel{4}} = 9$$

$$z = 3$$

الفصل الثاني

المعادلات والمتراجحات

المعادلات / هنالك عدة طرق لحل المعادلات من الدرجة الثانية وبمتغير واحد فقط:

ماذا نعني بالمعادلة من الدرجة الثانية ؟

اي انها تحتوي على المتغير (x) الذي أسه مربع (مرفوع للقوة الثانية)

حل المعادلات /

(1) معادلة من الدرجة الاولى

مثال /

$2x = 6 \rightarrow \frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$x - 2 = 3 \rightarrow x - 2 + 2 = 3 + 2 \rightarrow x = 5$

(2) لحل معادلة من الدرجة الثانية فما فوق

(أ) طريقة استخراج العامل المشترك .

مثال /

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

أما $x = 0$ أو $x = 2$

يتم استخراج المشترك وبأصغر اس.

(ب) طريقة التحليل

(1) الفرق بين مربعين $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$

(2) طريقة التجربة (لثلاث حدود)

مثال /

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 3)(x - 2) = 0$

أما $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

أو $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

(3) طريقة الدستور $x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حيث $(b^2 - 4ac)$ يسمى المميز ويكون إما اكبر من الصفر فللمعادلة حلان مختلفان.

وإذا كان صفر فللمعادلة حلان متساويان.

وإذا كان اصغر من الصفر فالمعادلة ليس لها حل في R

(جـ) حل المعادلات الجذرية:

تقوم بجعل الحد الجذري في طرف والحدود الأخرى بالطرف الآخر

ثم نربع الطرفين أو نكعب الطرفين فنرفع الجذر ونربع الطرف الآخر.

$\sqrt{x} - x = 0 \rightarrow \sqrt{x} = x$

$(\sqrt{x} = x)^2 \rightarrow x = x^2$

$x^2 - x = 0 \rightarrow x(1 - x) = 0$

أما $x = 0$ أو $1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

(د) حل المعادلات بالقيمة المطلقة :

نرفع المطلق ونسبق الطرف الاخر بالاشارة $\mp$

$|x-4|=2 \rightarrow |x-4|=\mp 2$

أما $x-4=2 \rightarrow x-4+4=2+4 \rightarrow x=6$

أو $x-4=-2 \rightarrow x-4+4=-2+4 \rightarrow x=2$

(هـ) حل المعادلات بطريقة اكمال المربع :

نجعل المتغيرات في جهة والثوابت في جهة أخرى

ونضيف إلى الطرفين (مربع نصف معامل x)

لكي يصبح طرف المتغيرات مربع كامل

$x^2+4x-5=0$

$x^2+4x+4=5+4$

$(x+2)^2=9$

$x+2=\mp 3$

أما $x+2=3 \rightarrow x+2-2=3-2 \rightarrow x=1$

أو $x+2=-3 \rightarrow x+2-2=-3-2 \rightarrow x=-5$

حل المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد

أولا / التحليل

(1) نقوم بالتخلص من الاقواس والكسور أن وجدت

(2) ننقل جميع القيم والحدود التي في الجهة اليمنى الى الجهة اليسرى من المعادلة

(3) جعل المعادلة بالصيغة التالية : $ax^2+bx+C=0$ بحيث $a \neq 0$

(4) يتم التحليل باحد الطرق (التجربة ، الفرق بين مربعي حدين) وغيرها .

مثال 1/ (كتاب) حل المعادلة التالية بطريقة التحليل $x^2-7x+6=0$

الحل

لا توجد اقواس ولا كسور $x^2-7x+6=0$

لا توجد حدود في الجهة اليمنى $x^2-7x+6=0$

$x^2-7x+6=0$

$(x-6)(x-1)=0$

اما $(x-6)=0 \rightarrow x=6$

أو $(x-1)=0 \rightarrow x=1$

مجموعة الحل $S=\{1,6\}$

مثال 2/ (كتاب) جد مجموعة حل المعادلة $x^2=49$

خطوات الحل

(1) جعل المعادلة بالصيغة العامة : $x^2-49=0$

(4) يتم التحليل بطريقة (الفرق بين مربعي حدين)

الحل

$x^2-49=0$

$(x-7)(x+7)=0$

اما $(x-7)=0 \rightarrow x=7$

أو $(x+7)=0 \rightarrow x=-7$

مجموعة الحل $S=\{-7,7\}$

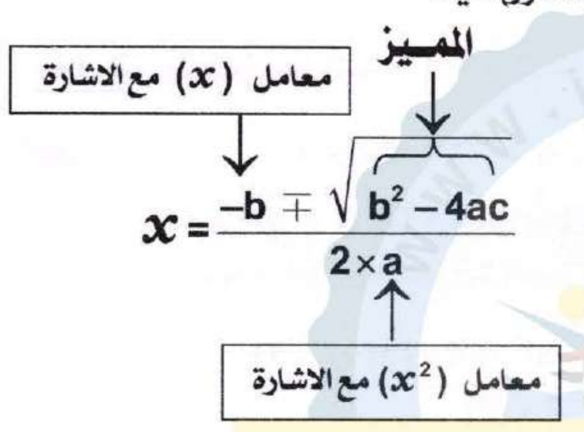
ثانيا / الدستور

الصيغة القياسية للمعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد هي $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$
هنالك معادلات يوجد لها حل بطريقة التحليل بالتجربة او الفرق بين مربعي حدين أو مربع كامل.

أو اذا طلب منك الحل بطريقة الدستور تترك جميع الحلول اعلاه وتحل المعادلة بطريقة الدستور فقط. وهنالك معادلات لا يمكن تحليلها بالتجربة فلنجأ الى استخدام القانون (الدستور) حيث

قانون الدستور :

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



حيث

a يمثل معامل (x^2) مع الاشارة

b يمثل معامل (x) مع الاشارة

C يمثل الحد المطلق الخالي من (x) مع اشارة الحد.

ما هو المميز

المميز

$b^2 - 4ac$

الحد المطلق C مع الاشارة

معامل (x^2) مع الاشارة

معامل (x) مع الاشارة

المميز هو $(b^2 - 4ac)$ وله خواص مهمة :

(1) اذا كان $b^2 - 4ac > 0$
اكبر من الصفر
فان للمعادلة حل في R
ولها جذران حقيقيان مختلفان

ونوع الجذران

جذران حقيقيان نسبيان $b^2 - 4ac$ ⇐ المميز موجب ومربع كامل

جذران حقيقيان غير نسبيان $b^2 - 4ac$ ⇐ المميز موجب وليس مربع كامل

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$ مجموعة الحل

(2) اذا كان $b^2 - 4ac = 0$ يساوي صفر

فان للمعادلة حل في R ولها جذران حقيقيان متساويان $\left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$ مجموعة الحل

(3) اذا كان $b^2 - 4ac < 0$ اصغر من الصفر (قيمة سالبة)
فليس للمعادلة حل في R ولها جذران غير حقيقيان (تخيليان)
∴ مجموعة الحل في R هي $R = \phi$

متى تكون قيمة المميز $b^2 - 4ac = 0$ يساوي صفر

الجواب/ في حالة كون المعادلة مربع كامل فان المميز $b^2 - 4ac = 0$ يساوي صفر فان للمعادلة حل في R ولها جذران حقيقيان متساويان

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$ مجموعة الحل

مثال 3/ (كتاب) حل المعادلة $2x^2 - 3x = 1$ بطريقة الدستور

الحل /

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow a = +2 , b = -3 , C = -1$$

المميز $b^2 - 4ac \rightarrow (3)^2 - 4 \times (+2) \times (-1) = 17 \in R =$

∴ يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز اكبر من الصفر

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-3) \mp \sqrt{(-3)^2 - 4 \times (2) \times (-1)}}{2 \times (2)}$$

$$x = \frac{3 \mp \sqrt{(9) - 4 \times (-2)}}{4} \rightarrow x = \frac{3 \mp \sqrt{(9) + 8}}{4} \rightarrow x = \frac{3 \mp \sqrt{17}}{4}$$

∴ اما $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$, أو $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$

مجموعة الحل $S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{17}}{4} , \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$

مثال 4/ (كتاب) حل المعادلة $4x^2 - 4x + 1 = 0$ بطريقة الدستور

الحل /

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow a = +4 , b = -4 , C = 1$$

المميز $b^2 - 4ac \rightarrow (-4)^2 - 4 \times (+4) \times (1) = 16 - 16 = 0$

∴ يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز تساوي الصفر

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-4) \mp \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (4) \times (1)}}{2 \times (4)}$$

$$x = \frac{4 \mp \sqrt{(16) - 4 \times (4)}}{8} \rightarrow x = \frac{4 \mp \sqrt{(16) - 16}}{8} \rightarrow x = \frac{4 \mp \sqrt{0}}{8}$$

∴ اما $x = \frac{4 - \sqrt{0}}{8}$, أو $x = \frac{4 + \sqrt{0}}{8}$

مجموعة الحل $S = \left\{ \frac{1}{2} , \frac{1}{2} \right\}$ جذران حقيقيان متساويان

$$\therefore S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

تمارين (1 – 2)

1) جد مجموعة حلول المعادلات الاتية مستخدما طريقة التحليل :

(أ) $6x^2 + 7x - 3 = 0$

الحل /

$(3x - 1)(2x + 3) = 0$

اما $(3x - 1) = 0 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

أو $(2x + 3) = 0 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$

مجموعة الحل $S = \left\{ -\frac{3}{2} , \frac{1}{3} \right\}$

(ب) $2x^2 + 3x - 9 = 0$

الحل /

$(x + 3)(2x - 3) = 0$

اما $(x + 3) = 0 \rightarrow x = -3$

أو $(2x - 3) = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

مجموعة الحل $S = \left\{ -3 , \frac{3}{2} \right\}$

(جـ) $x^2 + 12 = 7x$

الحل / نرتب المعادلة بالصيغة القياسية

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x - 4)(x - 3) = 0$

اما $(x - 4) = 0 \rightarrow x = 4$

أو $(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3$

مجموعة الحل $S = \{ 3 , 4 \}$

(د) $x - \sqrt{x} - 12 = 0 , x > 0$

الحل /

$x - \sqrt{x} - 12 = 0$

$\left(\sqrt{x} - 4\right)\left(\sqrt{x} + 3\right) = 0$

اما $\left(\sqrt{x} - 4\right) = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16$

أو $\left(\sqrt{x} + 3\right) = 0 \rightarrow \sqrt{x} = -3$ يهمل

مجموعة الحل $S = \{ 16 \}$

التحقيق/

$16 - (4) - 12 = 0$

$12 - 12 = 0$

$0 = 0$

(هـ) $x^6 + 7x^3 = 8$

الحل /

$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

$\left(x^3 + 8\right)\left(x^3 - 1\right) = 0$

اما $\left(x^3 + 8\right) = 0 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x = -2$

أو $\left(x^3 - 1\right) = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$

مجموعة الحل $S = \{ -2 , 1 \}$

2) بين نوع جذري المعادلات الاتية ثم جد مجموعة حلول المعادلات الاتية :

(أ) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

الحل /

$3x^2 - 7x + 2 = 0$

$a = +3 , b = -7 , C = +2$

المميز $= b^2 - 4ac$

المميز $= (-7)^2 - 4 \times (+3) \times (+2)$

المميز $= (-7)^2 - 4 \times (+6)$

المميز $= 49 - 24$

المميز $= 25 > 0$

∴ يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز أكبر من الصفر وللمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{7 \mp \sqrt{25}}{6}$$

$$x = \frac{7 \mp 5}{6}$$

∴ اما $x = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$

او $x = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مجموعة الحل $S = \left\{ \frac{1}{3} , 2 \right\}$

(ب) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

الحل /

$3x^2 - 7x + 4 = 0$

$a = +3 , b = -7 , C = +4$

المميز $= b^2 - 4ac$

المميز $= (-7)^2 - 4 \times (+3) \times (+4)$

المميز $= (-7)^2 - 4 \times (+12)$

المميز $= 49 - 48$

المميز $= 1 > 0$

∴ يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز أكبر من الصفر وللمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{7 \mp \sqrt{1}}{6}$$

$$x = \frac{7 \mp 1}{6}$$

∴ اما $x = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

او $x = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

مجموعة الحل $S = \left\{ \frac{4}{3} , 1 \right\}$

(جـ) $4x^2 + 9 = 12x$

الحل /

$4x^2 + 9 = 12x$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$a = +4 , b = -12 , C = +9$

المميز $= b^2 - 4ac$

المميز $= (-12)^2 - 4 \times (+4) \times (+9)$

المميز $= (-12)^2 - 4 \times (+36)$

المميز $= 144 - 144$

المميز $= 0$

∴ يمكن تطبيق الدستور
لان قيمة المميز تساوي صفر
ولها جذران حقيقيان متساويان

$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-12)}{2 \times (+4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

مجموعة الحل $S = \{ \frac{3}{2} \}$

(د) $x^2 - 4x + 5 = 0$

الحل /

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$a = +1 , b = -4 , C = +5$

المميز $= b^2 - 4ac$

المميز $= (-4)^2 - 4 \times (+1) \times (+5)$

المميز $= (-4)^2 - 4 \times (+5)$

المميز $= 16 - 20$

المميز $= -4 < 0$

∴ لا يمكن تطبيق الدستور
لان قيمة المميز أصغر من الصفر
∴ ليس للمعادلة حل في R

مجموعة خالية $S = \phi$

مثال (خارجي) هل للمعادلة $x^2 - 2x + 5 = 0$ حل في R وما نوع الجذرين

الحل /

$x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow a = +1 , b = -2 , C = +5$

المميز $b^2 - 4ac \rightarrow (-2)^2 - 4 \times (+1) \times (+5) = 4 - 20 = -16 < 0$

∴ لا يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز اصغر من الصفر (المميز $= -16$)

∴ ليس للمعادلة حل في R ولها جذران تخيليان لان المميز اصغر من الصفر (المميز $= -16$)

اثرائيات

سؤال (خارجي) بين نوع جذري المعادلة $x^2 - 5 = 3x$ ثم جد مجموعة حلول المعادلة

الحل /

$x^2 - 5 = 3x$

$x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow a = +1 , b = -3 , C = -5$

المميز $b^2 - 4ac \rightarrow (-3)^2 - 4 \times (+1) \times (-5) = 9 - 4 \times (-5) = 9 + 20 = 29$

∴ يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز أكبر من الصفر

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-3) \mp \sqrt{(-3)^2 - 4 \times (+1) \times (-5)}}{2 \times (1)}$$

$$x = \frac{3 \mp \sqrt{(9) - 4 \times (-5)}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \mp \sqrt{(9) + 20}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \mp \sqrt{29}}{2}$$

∴ اما $x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$, أو $x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$

مجموعة الحل $S = \{ \frac{3 - \sqrt{29}}{2} , \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \}$

سؤال (خارجي) حل المعادلة $\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$ بطريقة الدستور

الحل /

2,3,6	2
1,3,3	3
1,1,1	6

$$\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$$

$$\frac{1\times2}{6}x^2 = \frac{1\times3}{6}x - \frac{1\times5}{6}$$

$$2x^2 = 3x - 5$$

$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow a = +2 \ , b = -3 \ , C = +5$$

المميز $b^2 - 4ac \Rightarrow (-3)^2 - 4\times(+2)\times(+5) = 9 - 4\times(10) = 9 - 40 = -31$

∴ لا يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز اصغر من الصفر (قيمة سالبة $=-31$)

∴ ليس للمعادلة حل في R ولها جذران تخيليان لان المميز اصغر من الصفر (قيمة سالبة $=-16$)

سؤال (اثرائي) حل المعادلة $\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{2}{(x+2)(x-2)}$ وتحقق من صحة الاجابة

الحل / باخذ المضاعف المشترك للمقامات وضربه في جميع حدود المعادلة

$$\left[\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{2}{(x+2)(x-2)}\right](x+2)(x-2)$$

$$\frac{5(x+2)(x-2)}{(x+2)} + \frac{3(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{5\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}} + \frac{3(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \frac{2\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}$$

$$5(x-2) + 3(x+2) = 2$$

$$5x - 10 + 3x + 6 = 2$$

$$5x + 3x - 10 + 6 - 2 = 0$$

$$[8x - 6 = 0] \div 2 \Rightarrow 4x - 3 = 0$$

$$4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

مجموعة الحل $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

الفترات الحقيقية

(1) تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية :

تسمى المجموعة $\{x : x \in R , a \le x \le b\}$ **الفترة المغلقة Closed Intervals** من a الى b ونرمز لها بالرمز $[a , b]$ وتمثل على خط الاعداد كما في الشكل (1 – 2)

حيث رمزنا لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها (a) ولنقطة النهاية لهذه القطعة باحداثيها (b) لقد اهملنا على هذا الشكل ذكر نقطة الاصل (0) يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى الفترة $[a , b]$ ومجموعة نقاط القطعة المستقيمة a b.

ويمكن كتابتها على شكل مجموعة $\{ x : x \in R , a \le x \le b \}$

ويمكن كتابتها على شكل فترة $[a , b]$

يلاحظ ان $a \in [a , b]$ وكذلك $b \in [a , b]$

(2) نسمي المجموعة

$\{x : x \in R , a < x < b\}$ = **الفترة المفتوحة Open Intervals** من (a) الى (b)

وتمثل على خط الاعداد الحقيقية كما في الشكل (2 – 2)

يلاحظ في هذه الحالة ان $b \notin (a , b) , a \notin (a , b)$

الشكل (2 – 2)

والدائرتين حول العددين b , a في الشكل تدلان على ذلك.

(3) نسمي كلا من :

$(a , b] = \{ x : x \in R , a < x \le b\}$

$[a , b) = \{x : x \in R , a \le x < b\}$

الفترة نصف المغلقة (او نصف المفتوحة Half Open)

حيث a<b وتمثل المجموعة الاول كما في الشكل (3 – 2)

وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل (4 – 2)

$(a , b] = \{ x : x \in R , a < x \le b\}$

الشكل (3 – 2)

$[a , b) = \{x : x \in R , a \le x < b\}$

الشكل (4 – 2)

(4) مجموعة الاعداد الحقيقية

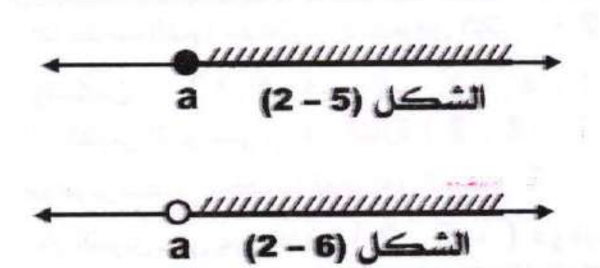
التي تزيد على العدد الحقيقي (a) او تساويه هي :

$\{x : x \in R , x \ge a\}$

وتمثلها كما في الشكل (5 – 2)

كما ان المجموعة $\{X : X \in R , X > a\}$

يمثلها الشكل (6 – 2)



الشكل (5 – 2)

الشكل (6 – 2)

(5) **مجموعة الاعداد الحقيقية** التي تساوي العدد الحقيقي (a)

او الاصغر منه هي $\{x : x \in R , x \leq a\}$

فيمثلها الشكل (7 – 2)

الشكل (7 – 2)

اما المجموعة $\{x : x \in R , x < a\}$

فيمثلها الشكل (8 – 2)

الشكل (8 – 2)

مثال 6/ (كتاب) جد (أ) $[3 , 8] \cap [1 , 6]$ (ب) $[1 , 6] - [3 , 8]$

الحل / (أ) $[3 , 8] \cap [1 , 6] = [3 , 6]$ (ب) $[1 , 6] - [3 , 8] = [1 , 3)$

مثال 7/ (كتاب) جد $\{x : x > -3\} \cap [-5 , 2)$

الحل / $\{x : x > 3\} \cap [-5 , 2) = \{x : x \geq -5\}$

ملاحظة/ كيف تعرف الفترة ونوعها وطريقة كتابتها

(1) اذا كانت الفترة مكتوبة بالشكل الاتي : $[-5 , 2]$ فترة مغلقة ، $(-5 , 2)$ فترة مفتوحة ، $[-5 , 2)$ فترة نصف مفتوحة ، $(-5 , 2]$ فترة نصف مفتوحة

(2) اذا كانت الفترة مكتوبة بالشكل الاتي : $[-5 , 2]$ **تعني فترة مغلقة**

وتكون $\{-5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$

كتبنا العنصر 5–

لان القوس الذي على يسار الفترة $[-5 , 2]$

هو قوس كبير وكذلك ادخلنا العنصر 2

لان القوس على يمين الفترة $[-5 , 2]$ هو قوس كبير ايضا ويكون تمثيلها على خط الاعداد

وهذا يعني ان المسقط الاول 5– مشمول بالفترة ، وكذلك بالنسبة للمسقط 2 مشمول بالفترة اعلاه

(3) اذا كانت الفترة مكتوبة بالشكل الاتي : $(-5 , 2)$ **تعني فترة مفتوحة**

وتكون $\{-4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1\}$ لم نكتب العنصر 5–

لان القوس الذي على يسار الفترة $(-5 , 2)$

هو قوس صغير وكذلك لم ندخل العنصر 2

لان القوس على يمين الفترة $(-5 , 2)$ هو قوس صغير ايضا ويكون تمثيلها على خط الاعداد

وهذا يعني ان المسقط الاول 5– غير مشمول بالفترة ، وكذلك بالنسبة للمسقط 2 غير مشمول ايضا

(4) اذا كانت الفترة مكتوبة بالشكل الاتي : $[-5, 2)$ **تعني فترة نصف مفتوحة**

وتكون $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

نكتب العنصر -5

لان القوس الذي على يسار الفترة $[-5, 2)$

هو قوس كبير ولم ندخل العنصر 2

لان القوس على يمين الفترة $[-5, 2)$ هو قوس صغير ويكون تمثيلها على خط الاعداد

(5) اذا كانت الفترة مكتوبة بالشكل الاتي : $(-5, 2]$ **تعني فترة نصف مفتوحة**

وتكون $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

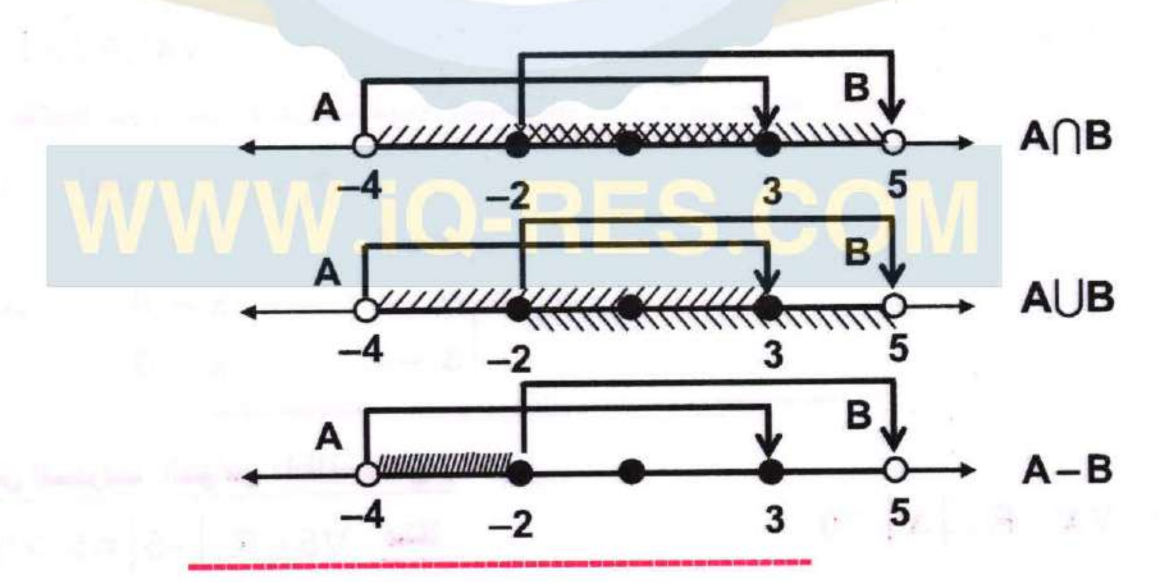
لم نكتب العنصر -5

لان القوس الذي على يسار الفترة $(-5, 2]$ هو قوس صغير وندخل العنصر 2

لان القوس على يمين الفترة $(-5, 2]$ هو قوس كبير ويكون تمثيلها على خط الاعداد

مثال / (اثرائي) لتكن $A = (-4, 3]$ و $B = [-2, 5)$

(أ) مثل على خط الاعداد كلا من $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$



(ب) اكتب كلا من $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ على شكل فترات

الحل /

$A \cap B = (-4, 3] \cap [-2, 2) = [-2, 3]$

$A \cup B = (-4, 3] \cup [-2, 5) = (-4, 5)$

$A - B = (-4, 3] - [-2, 5) = (-4, -2)$

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي

عددين لهما نفس البعد من النقطة (0) ولهما اشارتين متعاكستين $(3,3-)$
يسمى كل عدد معاكس للعدد الاخر.
ويرمز للعدد (a) مجموعة الاعداد الحقيقية بـ $(-a)$
فالعدد (-4) و (4)
هما متعاكسان بالاشارة متساويان بالمقدار.

والعدد $\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{2}$ متعاكسان ايضا.

القيمة المطلقة

كل عدد (a) يرمز له بالرمز $|a|$ هي المسافة بين النقطة (a) والعدد (0) على خط الاعداد.

ملاحظة / القيمة المطلقة لاي عدد في R هو عدد موجب. مثل $|5| = 5$ و $|-5| = 5$
كل مطلق عدد ياخذ على خط الاعداد قيمتين احداهما موجبة والاخرى سالبة

تعريف / $\forall x \in R$ نعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x
التي نرمز لها بالرمز $|x|$ كما في الشكل الاتي:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

خاصية : $\sqrt{x^2} = |x|$

مثال 7/ (كتاب) عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما ياتي :

1) $|-7|$ **الحل /** $|-7| = 7$

2) **الحل /**

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 3-x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

نستنتج من التعريف الخواص المطلقة وهي :

(1) $\forall x \in R, |x| \geq 0$

مثلا $\forall 5 \in R, |-5| = 5 > 0$
$0 \in R, |0| = 0$

(2) $\forall x \in R, |-x| = |x|$

مثلا $9 = |-9| = |9| > 0$
$0 \in R, |0| = 0$

(3) $\forall x \in R, -|x| \leq x \leq |x|$

مثلا $\forall 5 \in R, |6| = 6 > -|6|$
$0 \in R, |0| = 0$

(4) $\forall x \in R , x^2 = |x|^2$ مثلا $(-3)^2 = |-3|^2$

(5) $\forall x , y \in R , |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ مثلا $x = 3 , y = -5$

$|x , y| = |x| \cdot |y|$

$|3(-5)| = (3) \cdot (5)$

$15 = 15$

(6) اذا كان $|x| \leq a$ فان $-a \leq x \leq a$ مثلا اذا كان $|x| \leq 7$ فان $-7 \leq x \leq 7$

(7) $\forall x , y \in R$ فان $|x + y| = |x| + |y|$ مثلا $x = 3 , y = 5$

$|3+5| = |3| + |5|$

$8 = 8$

$x = 3 , y = -5$

$|3+(-5)| = |3| + |-5|$

$|-2| < 3 + 5$

$2 < 8$

تمارين (2 – 2)

1) أكتب خمسة عناصر في كل من الفترات

$(-10,-6]$ الحل / $(-10,-6] = \{-9.9 , -9 , -8 , -7 , -6\}$

$(-1, 1]$ الحل / $(-1, 1] = \{-\frac{3}{4} , -\frac{1}{2} , -\frac{1}{4} , \frac{1}{4} , 1\}$

$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ الحل / $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] = \{\frac{3}{10} , \frac{1}{3} , \frac{5}{12} , \frac{5}{11}\}$

$[0 , 1]$ الحل / $[0 , 1] = \{0 , \frac{1}{4} , \frac{1}{2} , \frac{3}{4} , 1\}$

$[1 , 2]$ الحل / $[1 , 2] = \{1 , 1.1 , 1.2 , 1.6 , 1.8 , 1.9 , 2\}$

$(3 , 4]$ الحل / $(3 , 4] = \{3.3 , 3.4 , 3.5 , 3.9 , 4\}$

$(5 , 7]$ الحل / $(5 , 7] = \{5.2 , 5.3 , 5.9 , 6.5 , 6.8 , 7\}$

2) باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي جد ما ياتي :

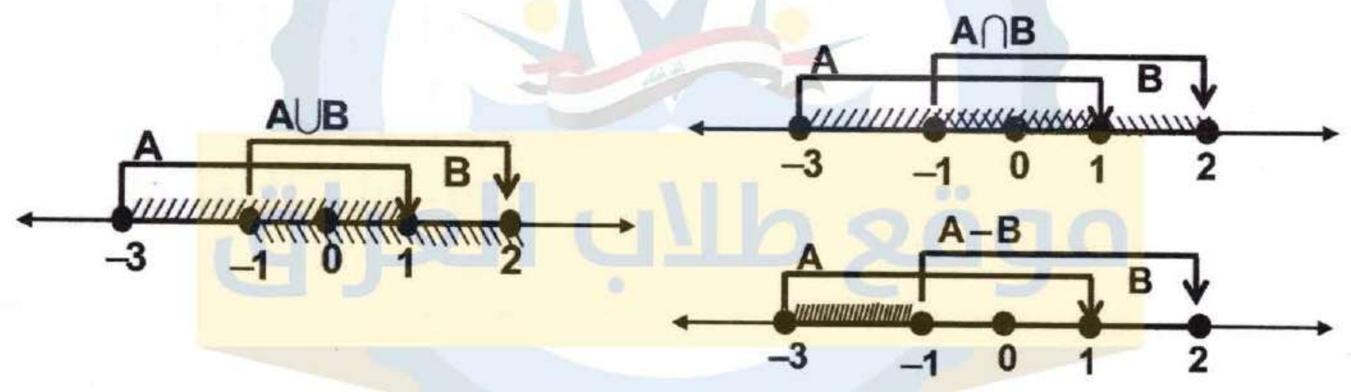
$\|-3\|$ الحل / $\|-3\| = 3$	$\left\|\frac{3}{7}\right\|$ الحل / $\left\|\frac{3}{7}\right\| = \frac{3}{7}$	$\|-\sqrt{2}\|$ الحل / $\|-\sqrt{2}\| = \sqrt{2}$

$|\sqrt{3}-5|$ الحل / $|\sqrt{3}-5| = 5-\sqrt{3}$

$|2-\sqrt{5}|$ الحل / $|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$

3) لتكن $A = [-3, 1]$ و $B = [-1, 2]$

(أ) مثل على خط الاعداد كلا من $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$



(ب) اكتب كلا من $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ على شكل فترات

الحل /

$A \cap B = [-3, 1] \cap [-1, 2] = [-1, 1]$

$A \cup B = [-3, 1] \cup [-1, 2] = [-3, 2]$

$A - B = [-3, 1] - [-1, 2] = [-3, -1)$

---

4) جد كلا مما ياتي :

(أ) $\{x : x \geq 1\} \cap [-3, 2)$

الحل/

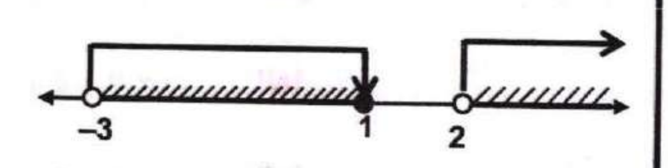
$\{x : x \geq 1\} \cap [-3, 2) = [-1, 2)$

−3 −1 0 1 2

(ب) $(-3, 1] \cap \{x : x > 2\}$

الحل/

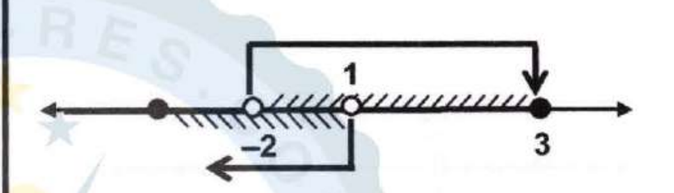
$(-3, 1] \cap \{x : x > 2\} = \phi$



(جـ) $(-2,3]\cup\{x : x<1\}$

الحل/

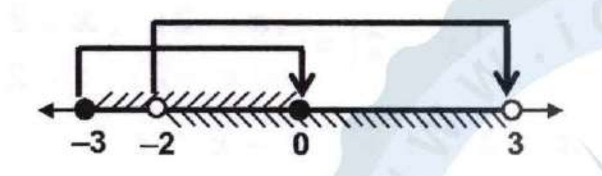
$(-2,3]\cup\{x : x<1\}=\{x : x\leq 3\}$



(د) $[-3,0]-(-2,3)$

الحل/

$[-3,0]-(-2,3)=[-3,-2)$



المتراجحات

تعلمنا سابقا كيف نحل معادلة من الدرجة الدرجة الاولى.
والان سوف نتعلم كيف نحل المتراجحة لمتغير واحد .
x على العلاقة $ax + b \geq 0$ ، $ax + b < 0$ ،

الاعداد السالبة   الاعداد الموجبة

ويمكن ان نستخدم العلاقات التالية
لحل اية متراجحة ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$)

$x \leq 3$

نلاحظ المتراجحة $x \leq 3$ فالحل يكون مجموعة الاعداد الحقيقية R التي تجعل المتراجحة عبارة صائبة في هذه الحالة فمجموعة الحل هي كل الاعداد الحقيقية اصغر من او تساوي العدد ثلاثة
$x \leq 3$ السبب مجموعة الحل تمتلك قيم غير محددة
(اي من 3 الى ما لا نهاية من الاعداد)

$x \leq 3$

ويمكن كتابتها على شكل مجموعة $\{x : x\in R , x\leq 3\}$
ويمكن كتابتها على شكل فترة $(-\infty , 3]$
عند اخذ دالتين مثل $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = x + 5$ ينتميان الى R
فالمتراجحة التي تحقق العلاقة $<$ للمتغير x والتي تكتب بالشكل $f(x) < g(x)$
حيث $f(x)$ و $g(x)$ تعبيران يحققان العلاقة $<$ تكون صائبة وتسمى متراجحة في متغير واحد x
فمجموعة القيم لـ (x) في المتراجحة $f(x) < g(x)$ والتي تجعلها تحقق العلاقة $<$
نقول اننا وجدنا مجموعة الحل للمتراجحة كما في المثال التالي

مثال 8/ (كتاب)

جد مجموعة الحل للمتراجحة

$3x + 1 < x + 5$
اذا كانت مجموعة التعويض هي R
ومثل مجموعة الحل على خط الاعداد .

الحل /

$$3x + 1 < x + 5$$
$$3x - x + 1 < x - x + 5$$
$$2x + 1 < 5$$
$$2x + 1 - 1 < 5 - 1$$
$$2x < 4$$
$$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(4)$$
$$x < 2$$

مجموعة الحل $= \{x : x\in R , x < 2\}$

2

حل المتراجحات من الدرجة الاولى التي تحتوي على مطلق

مثال 9/ (**كتاب**) اذا كان R هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحل للمتراجحة $|x-2|>5$

الحل /

$$|x-2| = \begin{cases} (x-2) & , x \geq 2 \\ -(x-2) & , x < 2 \end{cases}$$

$x-2>5$ أو $2-x>5$

$x-2+2>5+2$ أو $-2+2-x>5-2$

$x>7$ أو $x<-3$

-3 ، 7 ، ف$_2$ ، ف$_1$

مجموعة الحل هي / ف$_1$ ∪ ف$_2$ = $\{x : x \in R, x > 7\} \cup \{x : x \in R, x < -3\}$

مثال / (اثرائي) جد مجموعة الحل للمتراجحة $2 \leq |x+1| \leq 4$

الحل /

$$|x+1| = \begin{cases} (x+1) & , x \geq -1 \\ -(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$

-5 ، -3 ، 1 ، 3 ، ف$_2$ ، ف$_1$

$2 \leq -(x+1) \leq 4$ أو $2 \leq x+1 \leq 4$

$2 \leq -x-1 \leq 4$ أو $2 \leq x+1 \leq 4$

$2+1 \leq -x-1+1 \leq 4+1$ أو $2-1 \leq x+1-1 \leq 4-1$

$3 \leq -x \leq 5$ أو $1 \leq x \leq 3$

$-3 \geq x \geq -5$ أو $1 \leq x \leq 3$

مجموعة الحل هي / ف$_1$ ∪ ف$_2$ = $[1, 3] \cup [-5, -3]$

مثال / (اثرائي) جد مجموعة الحل للمتراجحة $|x+1| \leq 2$ حيث $X \in R$

الحل /

لاحظ ان هذه المتباينة يمكن حلها مباشرة

فيكون $|x+1| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x+1 \leq 2$

باضافة (-1) الى حدود المتباينة ينتج

$-2+(-1) \leq x+1+(-1) \leq 2+(-1)$

$-3 \leq x \leq 1$

$\therefore S = [-3, 1]$

حل المعادلات الانية (متغيرين) من الدرجة الثانية

يكون الحل بواسطة التعويض او الحذف اذا اشتملت المعادلة ذات المتغيرين على حد من الدرجة الثانية على الاقل او اشتملت على حاصل ضرب متغيرين فان هذه المعادلة تسمى معادلة من الدرجة الثانية في متغيرين

مثال 10/ **(كتاب)** اذا كانت مجموعة التعويض لكل من (x, y) هي R

$x = \{0, 1, 2, 3\}$ جد مجموعة الحل للنظام

$x - y = 1$ ---------- (1)

$x^2 + y = 11$ ---------- (2)

الحل / مجموعة الحل في المعادلة (1) $ف_1 = \{(0,-1), (1,0), (2,1), (3,2)\}$

مجموعة الحل في المعادلة (2) $ف_2 = \{(0,11), (1,10), (2,7), (3,2)\}$

فتكون مجموعة الحل للنظام هي $ف = ف_1 \cap ف_2 = \{(3,2)\}$

مثال 11/ **(كتاب)** اذا كانت مجموعة التعويض لكل من (x, y) هي R

$x = \{0, 1, 2, 3\}$ جد مجموعة الحل للنظام

$x - y = 1$ ---------- (1)

$x^2 + y = 11$ ---------- (2)

الحل / نتبع الطريقة الجبرية /

$x - y = 1$ ---------- (1)

من المعادلة (1) نستخرج معادلة (3) $x = 1 + y$ ---------- (3)

بتعويض المعادلة (3) في معادلة (2) ينتج $(y + 1)^2 + y = 11$

$y^2 + 2y + 1 + y = 11$

$y^2 + 3y - 10 = 0$

$(y + 5)(y - 2) = 0$

اما $y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$ او $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

بتعويض قيمة (y) في معادلة (3) ينتج

اما $x = 1 + (-5) = -4$ او $x = 1 + (2) = 3$

مجموعة الحل هي / $ف_1 \cup ف_2 = \{(-4, -5) \cup (3, 2)\}$

مثال 12/ **(كتاب)** لنفرض مجموعة التعويض لكل من (x, y) هي R جد مجموعة الحل للنظام

$x^2 - y^2 = 25$ ---------- (1)

$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 39$ ---------- (2)

الحل / بطرح (1) من (2) ينتج

$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 39$ ---------- (2)

$\mp x^2 \pm y^2 \quad = \mp 25$ ---------- (1)

بالطرح

$2x + 2y = 14$

$x + y = 7$

$x = 7 - y$ ---------- (3)

بتعويض المعادلة (3) في معادلة (1) ينتج

$$(7-y)^2+y^2=25$$
$$(49-14y+y^2)+y^2=25$$
$$2y^2-14y+49-25=0$$
$$y^2-7y+12=0$$
$$(y-3)(y-4)=0$$

اما $y-3=0 \Rightarrow y=3$ | بتعويض قيمة (y) في معادلة (3) ينتج | اما $x=7-(3)=4$

أو $y-4=0 \Rightarrow y=4$ | | أو $x=7-(4)=3$

مجموعة الحل هي / $ف_1 \cup ف_2 = \{(3,4),(4,3)\}$

تمارين (3 - 2)

1) جد مجموعة حل المتراجحات

(أ) $2x+5<7$

الحل/ $2x+5<7$

$$2x+5-5<7-5$$
$$2x<2$$
$$\frac{1}{2}(2x)<\frac{1}{2}(2)$$
$$x<1$$

مجموعة الحل هي /

$$\{x: x\in R, x<1\}$$

(ب) $x-3\geq 63$

الحل/

$$x-3\geq 63$$
$$x-3+3\geq 63+3$$
$$x\geq 66$$

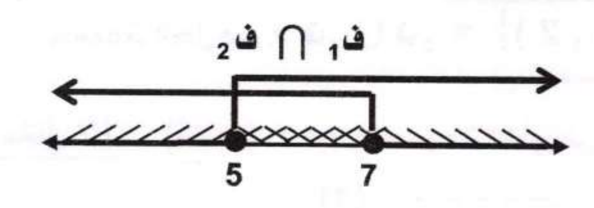
مجموعة الحل هي /

$$\{x: x\in R, x\geq 66\}$$

2) جد مجموعة حلول المتراجحات الاتية :

(أ) $|x-6|\leq 1$

الحل /



$$|x-6|=\begin{cases}(x-6) & , x\geq 6\\ -(x-6) & , x<6\end{cases}$$

$6-x\leq 1$ و $x-6\leq 1$

$-6+6-x\leq 1-6$ و $x-6+6\leq 1+6$

$-x\leq -5$ و $x\leq 7$

$x\geq 5$ و $x\leq 7$

$ف_1=\{x: x\in R, x\geq 5\} \cap ف_2=\{x: x\in R, x\leq 7\}$

$ف_1 \cap ف_2=[5,7]$

(ب) $|x+1| \le 4$

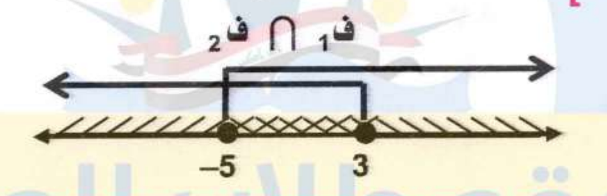
الحل /

$$|x+1| = \begin{cases} (x+1) & , x \ge 1 \\ -(x+1) & , x < 1 \end{cases}$$

$-x-1 \le 4$	و	$x+1 \le 4$
$-x-1+1 \le 4+1$	و	$x+1-1 \le 4-1$
$-x \le 5$	و	$x \le 3$
$x \ge -5$	و	$x \le 3$

ف$_1$ = $\{x : x \in R , x \ge -5\}$ $\cap$ ف$_2$ = $\{x : x \in R , x \le 3\}$

ف$_1$ $\cap$ ف$_2$ = $[-5 , 3]$



(جـ) $2-|2x-3| \le -3$

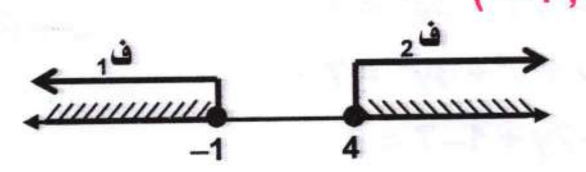
الحل /

$$|2x-3| = \begin{cases} (2x-3) & , x \ge \frac{3}{2} \\ -(2x-3) & , x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$2-(-(2x-3)) \le -3$	أو	$2-(2x-3) \le -3$
$2-(-2x+3) \le -3$	أو	$2-2x+3 \le -3$
$2+2x-3 \le -3$	أو	$-2x+5 \le -3$
$2x-1 \le -3$	أو	$-2x+5-5 \le -3-5$
$2x-1+1 \le -3+1$	أو	$-2x \le -8$
$2x \le -2$	أو	$2x \ge 8$
$\frac{1}{2}(2x) \le \frac{1}{2}(-2)$	أو	$\frac{1}{2}(2x) \ge \frac{1}{2}(8)$
$x \le -1$	أو	$x \ge 4$

ف$_1$ = $\{x : x \in R , x \le -1\}$ $\cup$ ف$_2$ = $\{x : x \in R , x \ge 4\}$

ف$_1$ $\cup$ ف$_2$ = $R \setminus (-1 , 4)$



(د) $|4x+1| \geq 15$

الحل /

$$|4x+1| = \begin{cases} (4x+1) & , x \geq \frac{-1}{4} \\ -(4x+1) & , x < \frac{-1}{4} \end{cases}$$

$-(4x+1) \geq 15$

$-4x-1 \geq 15$ أو $4x+1 \geq 15$

$-4x-1+1 \geq 15+1$ أو $4x+1-1 \geq 15-1$

$-4x \geq 16$ أو $4x+1-1 \geq 14$

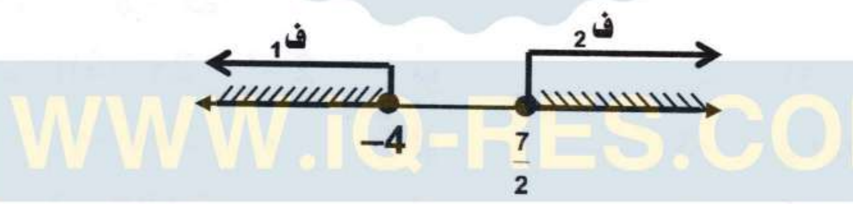
$4x \leq -16$ أو $4x \geq 14$

$\frac{1}{4}(4x) \leq \frac{1}{4}(-16)$ أو $\frac{1}{4}(4x) \geq \frac{1}{4}(14)$

$x \leq -4$ أو $x \geq \frac{7}{2}$

ف$_1$ = $\{x : x \in R, x \leq -4\}$ ف$_2$ = $\{x : x \in R, x \geq \frac{7}{2}\}$

ف$_1$ $\cup$ ف$_2$ = $\{x : x \in R, x \leq -4\} \cup \{x : x \in R, x \geq \frac{7}{2}\}$



---

3) باختيار مجموعة التعويض لكل من x ، y هي R جد مجموعة الحل لكل من الانظمة التالية:

(أ)
$x + y = 1$ ------------ (1)
$x^2 + 3y^2 = 7$ ------------ (2)

الحل /

$x + y = 1$ ------------ (1)
$x^2 + 3y^2 = 7$ ------------ (2)

من المعادلة (1) نستخرج معادلة (3)
$x = 1 - y$ ------------ (3)

بتعويض المعادلة (3) في معادلة (2) ينتج

$(1-y)^2 + 3y^2 = 7$

$1 - 2y + y^2 + 3y^2 = 7$

$4y^2 - 2y + 1 - 7 = 0$

$\left[4y^2-2y-6=0\right] \div 2$

$2y^2-y-3=0$

$(2y-3)(y+1)=0$

أما $2y-3=0 \Rightarrow 2y=3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}$

أو $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

بتعويض قيمة (y) في معادلة (3) ينتج

أما $x=1-\frac{3}{2}=\frac{2-3}{2}=\frac{-1}{2}$

أو $x=1-(-1)=1+1=2$

مجموعة الحل = $\{(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}), (2, -1)\}$

(ب)

$x \cdot y = 12$ ----------- (1)

$x^2 - y^2 = 32$ ----------- (2)

الحل /

$x \cdot y = 12$ ----------- (1)

$x^2 - y^2 = 32$ ----------- (2)

من المعادلة (1) نستخرج معادلة (3)

$x=\frac{12}{y}$ ----------- (3)

بتعويض المعادلة (3) في معادلة (2) ينتج

$(\frac{12}{y})^2 - y^2 = 32$

$\left[\frac{144}{y^2}-y^2=32\right] \times y^2$

$144-y^4=32y^2$

$y^4+32y^2-144=0$

$(y^2+36)(y^2-4)=0$

أما $y^2+36=0 \Rightarrow y^2=-36 \Rightarrow y=\mp\sqrt{-36}$ لا تنتمي R يهمل

أو $y^2-4=0 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\mp 2$

بتعويض قيمة (y) في معادلة (3) ينتج

أما $x=\frac{12}{2}=6$ أو $x=\frac{12}{-2}=-6$

مجموعة الحل = $\{(6, 2), (-6, -2)\}$

(جـ)

$x + y = 2$ ----------- (1)

$(x-1)^2 - (y-2)^2 = 5$ ----------- (2)

الحل /

$x + y = 2$ ----------- (1)

$(x-1)^2 - (y-2)^2 = 5$ ----------- (2)

من المعادلة (1) نستخرج معادلة (3)

$x = 2 - y$ ----------- (3)

بتعويض المعادلة (3) في معادلة (2) ينتج

$(2-y-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

$(1-y)^2 + (y-2)^2 = 5$

$(1-2y+y^2) + (y^2-4y+4) = 5$

$1-2y+y^2+y^2-4y+4 = 5$

$2y^2 - 6y + 5 = 5$

$2y^2 - 6y + 5 - 5 = 0$

$2y^2 - 6y = 0$

$2y(y-3) = 0$

أما $2y = 0 \Rightarrow y = 0$ أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

بتعويض قيمة (y) في معادلة (3) ينتج

أما $x = 2 - 0 = 2$ أو $x = 2 - 3 = -1$

مجموعة الحل = $\{(2, 0), (-1, 3)\}$

(د)

$x^2 + y^2 = 17$ ----------- (1)

$x^2 + y^2 + 2x = 19$ ----------- (2)

الحل /

$x^2 + y^2 = 17$ ----------- (1)

$\mp x^2 \mp y^2 \mp 2x = \mp 19$ ----------- (2)

بالطرح

$-2x = -2$

$x = \frac{-2}{-2} = 1$

$\boxed{x = 1}$

نعوض قيمة (x) في معادلة (1) لايجاد (y)

$(1)^2 + (y)^2 = 17$

$1 + y^2 = 17$

$y^2 = 17 - 1$

$y^2 = 16 \Rightarrow y = \sqrt{16}$

$y = \mp 4$

مجموعة الحل = $\{(1, 4), (1, -4)\}$

الفصل الثالث

حساب المثلثات

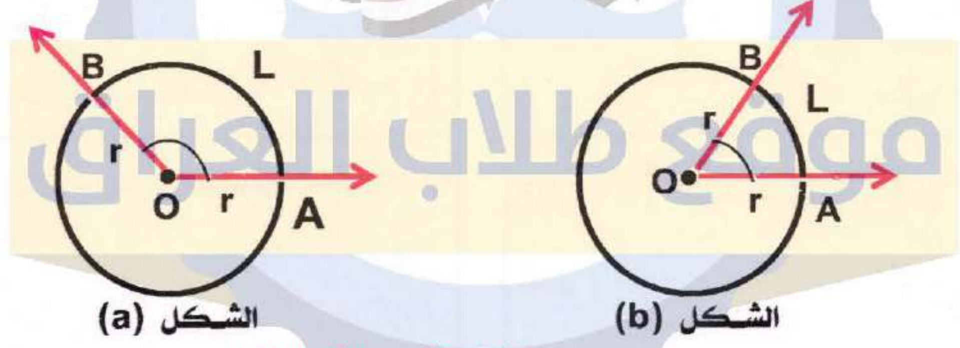
التقدير الدائري لقياس الزوايا

يوجد نظام لقياس الزوايا يسمى التقدير الدائري ، وتسمى وحدة القياس فيه الزاوية النصف قطرية

ويمكن تعريفها كما يلي :

الزاوية النصف قطرية / هي قياس للزاوية التي اذا وضع رأسها في مركز دائرة وقابلها قوس مساو لنصف قطر تلك الدائرة

ففي الشكل المرسوم أدناه طول القوس المقابل للزاوية المركزية AOB يساوي (L) وحدة طول ، نصف قطر الدائرة = r وحدة طول ، وكان L = r فان $m\measuredangle AOB$ بالتقدير الدائري = 1 زاوية نصف قطرية واذا كان L = 2r كما في الشكل الاخر (b) فان $m\measuredangle AOB$ بالتقدير الدائري تساوي مرتين من الزوايا النصف قطرية



الشكل (a) الشكل (b)

$$\text{قياس الزاوية المركزية مقدرا بالتقدير الدائري} = \frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{نصف قطر الدائرة}}$$

$$\theta = \frac{L}{r} \quad , \quad L = \theta \cdot r \quad , \quad r = \frac{L}{\theta}$$

العلاقة بين التقدير الستيني والتقدير الدائري لقياس الزوايا

Degree	−180°	−135°	−90°	−45°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

اذا قسمنا دائرة الى 360° قسما متساويا فاننا نحصل على 360° قوسا متساويا ، كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في القياس الستيني Degree Measure ويرمز له (1°)

كما ان : $1° = 60$ دقيقة $= 60'$ $\quad$ $1' = 60$ ثانية $= 60''$

ذكرنا سابقاً ان محيط الدائرة = $2\pi\ r$

وبما ان $\theta = \frac{L}{r} = \frac{2\pi\ r}{r}$

$\therefore 2\pi$ زاوية نصف قطرية = 360°

π زاوية نصف قطرية = 180°

$\therefore$ 1 زاوية نصف قطرية = $\frac{180°}{\pi}$

$\therefore 1° = \frac{\pi}{180°}$ زاوية نصف قطرية

= 0.01745 زاوية نصف قطرية

وبصورة عامة : $\frac{\theta}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$ تستخدم العلاقة اعلاه لتحويل قياس الزاوية من التقدير الدائري الى الستيني وبالعكس حيث D° قياس الزاوية بالنظام الستيني ، θ قياس الزاوية بالنظام الدائري

مثال 1/ (كتاب) حول

(أ) 40° الى التقدير الدائري

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{D^\circ}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{40^\circ} \rightarrow \theta = \frac{40\pi}{180^\circ}$$

$\theta = \frac{2\pi}{9}$ من الزوايا النصف قطرية

(ب) 75° الى التقدير الدائري

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{D^\circ}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{75^\circ} \rightarrow \theta = \frac{75\pi}{180^\circ}$$

$\theta = \frac{5\pi}{12}$ من الزوايا النصف قطرية

(جـ) 2.6π الى التقدير الستيني

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{D^\circ}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2.6\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = \frac{180 \times 2.6\pi}{\pi}$$

$$D^\circ = 180^\circ \times 2.6 = 468^\circ$$

(د) $\frac{\pi}{4}$ الى التقدير الستيني

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{D^\circ}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = \frac{180 \times \frac{1}{4}\pi}{\pi}$$

$$D^\circ = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$$

مثال 2/ (كتاب) زاوية مركزية قياسها 60° فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 9 سم ؟

الحل / $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\theta}{60^\circ} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ من الزوايا النصف قطرية

$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow$ قياس الزاوية بالتقدير الدائري

$$\frac{L}{r} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{L}{9} = \frac{\pi}{3}$$

$L = 3\pi = 3 \times 3.142 = 9.426$ سم طول القوس

مثال 3/ (كتاب) زاوية مركزية طول قوسها 22 سم وطول نصف قطر دائرتها 20 سم . فما مقدار قياسها الستيني ؟

الحل / زاوية نصف قطرية $\theta = \frac{L}{r} = \frac{22}{20}$ قياس الزاوية المركزية بالدائري

$$\therefore \frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{22}{20}}{D°}$$

$$\therefore D° = \frac{22}{20} \times \frac{180°}{\pi} = 63°$$ بالقياس بالتقدير الستيني

مثال 4/ (كتاب) طول القوس المقابل لزاوية مركزية مقدارها °35 يساوي 5 سم . فما نصف قطر دائرته ؟

الحل / زوايا نصف قطرية

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{35°} \rightarrow \theta = \frac{35\pi}{180°}$$

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{35\pi}{180°} = \frac{5}{r}$$

$$\therefore r = \frac{180° \times 5}{35\pi} = 7.18 \text{ cm}$$ طول نصف القطر

مثال (اثرائي) / في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيه الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية فما قياس كل منها بالتقدير الستيني ؟

الحل /

$$\because \frac{Q}{D°} = \frac{\pi}{180°} \rightarrow \frac{0.44}{D°} = \frac{\pi}{180°}$$

$$\therefore D° = \frac{0.44 \times 180}{\pi} = \frac{0.44 \times 180}{3.14} = 25.2°$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما A , B

$A + B = 90°$ ---------- (1)

$A - B = 25.2°$ ---------- (2) بالجمع

$2A = 115.2$

$\therefore A = 57.6°$

$B = 32.4°$

تمارين (1 – 3)

1) حول الى التقدير الدائري كل من قياس الزوايا الاتية : $30° , 120° , 15° , 300°$

الحل /

$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{30°} \rightarrow \theta = \frac{30 \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$ من الزوايا النصف قطرية	$30°$
$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{120°} \rightarrow \theta = \frac{120 \times \pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$ من الزوايا النصف قطرية	$120°$
$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{15°} \rightarrow \theta = \frac{15 \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{12}$ من الزوايا النصف قطرية	$15°$
$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{300°} \rightarrow \theta = \frac{300 \times \pi}{180} = \frac{5}{3}\pi$ من الزوايا النصف قطرية	$300°$

---

2) حول كلا من الزوايا النصف قطرية الاتية الى التقدير الستيني $\frac{1}{3} , \frac{\pi}{3} , \frac{5\pi}{6} , \frac{3\pi}{5}$

الحل /

$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{3\pi}{5}}{D°} \rightarrow D° = \frac{180 \times \frac{3\pi}{5}}{\pi} = 108°$	$\frac{3\pi}{5}$
$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{D°} \rightarrow D° = \frac{180 \times \frac{5\pi}{6}}{\pi} = 150°$	$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{\pi}{3}}{D°} \rightarrow D° = \frac{180 \times \frac{\pi}{3}}{\pi} = 60°$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{1}{3}}{D°} \rightarrow D° = \frac{180 \times \frac{1}{3}}{\pi} = 19.1°$	$\frac{1}{3}$

---

3) قياس زاوية مركزية في دائرة $\frac{5}{6}$ من الزوايا النصف قطرية تقابل قوسا طوله 25 سم جد نصف قطر تلك الدائرة ؟

الحل /

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow r = \frac{L}{\theta} \rightarrow r = \frac{25}{\frac{5}{6}} \rightarrow r = \frac{25}{1} \times \frac{6}{5}$$

$$r = \overset{5}{\cancel{25}} \times \frac{6}{\cancel{5}} \rightarrow r = 30cm$$ طول نصف قطر الدائرة

4) ما طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها °135 في دائرة نصف قطرها 8 سم ؟

الحل /

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{135°} \rightarrow \theta = \frac{135° \times \pi}{180°} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow L = \theta \cdot r = \frac{3\pi}{4} \cdot 8 \rightarrow L = 6\pi = 6 \times 3.14 = 18.84 \text{ cm}$$

---

5) زاوية مركزية طول قوسها 9.42 سم وطول نصف قطر دائرتها 6 سم.
فما مقدارها بالتقدير الستيني ؟

الحل /

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{9.42}{6} = 1.57$$

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°} \rightarrow \frac{\pi}{180°} = \frac{1.57}{D°} \rightarrow D° = \frac{180° \times 1.57}{\pi} = \frac{282.6}{3.14} = 90°$$

اثرائيات

سؤال (خارجي) زاوية مركزية طول قوسها 22 سم وطول نصف قطر دائرتها 14 سم.
فما مقدار قياس الزاوية المركزية بالتقدير الستيني

الحل /

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{22}{14} \rightarrow \theta = \frac{11}{7}$$

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{\theta}{D°}$$

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{11}{7}}{D°}$$

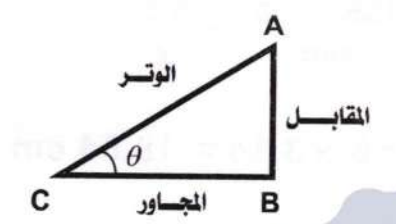
$$D° = \frac{180° \times \frac{11}{7}}{\pi}$$

$$D° = \frac{180° \times \frac{11}{7}}{\frac{22}{7}}$$

$$D° = 180° \times \frac{11}{7} \times \frac{7}{22} = \frac{180°}{2} = 90°$$

النسب المثلثية لزاوية حادة

$\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية في B:



جيب الزاوية الحادة $(\sin\theta)$ تقرأ (ساين ثيتا)

وتكتب $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$

جيب تمام الزاوية الحادة $(\cos\theta)$ تقرأ (كوساين ثيتا) وتكتب $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$

ظل الزاوية الحادة $(\tan\theta)$ تقرأ (تان ثيتا) وتكتب $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}$

بعض العلاقات الاساسية في حساب المثلثات

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

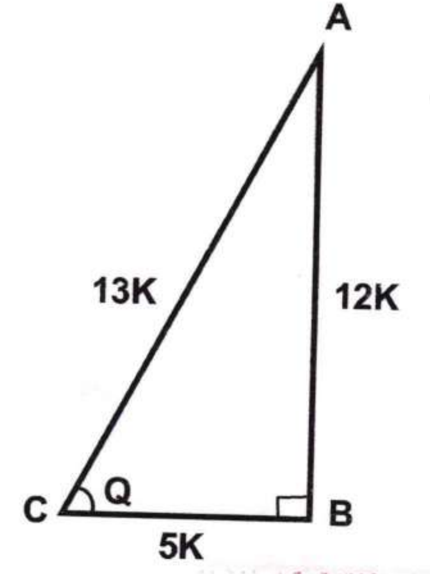
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

مثال 5/ (كتاب) اذا علمت ان $\cos C = \frac{5}{13}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في B

جد $\tan C , \sin A , \cos A$

الحل / نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B

$\therefore \cos C = \frac{5}{13}$, BC = 5k , AC = 13k , k ثابت

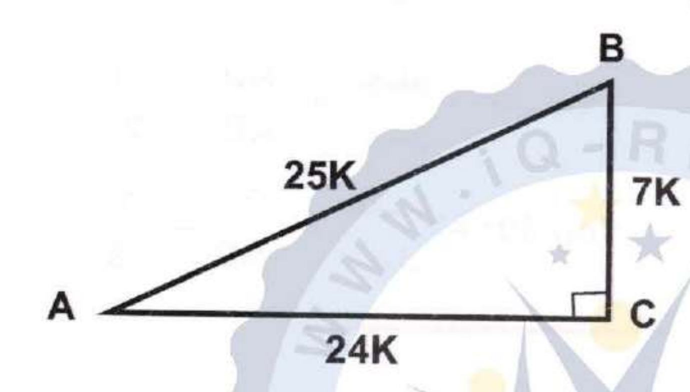


بأستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(13k)^2 = (AB)^2 + (5k)^2$$
$$(AB)^2 = (13k)^2 - (5k)^2$$
$$(AB)^2 = 169k^2 - 25k^2$$
$$(AB)^2 = 144k^2$$
$$\therefore AB = 12k$$
$$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$
$$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$
$$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

مثال 6/ (كتاب) اذا علمت ان $\tan A = \frac{7}{24}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في C جد cos B , sin A

الحل / نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في C



$\tan A = \frac{7}{24}$

$BC = 7k \ , \ AC = 24k$

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$(AB)^2 = (24k)^2 + (7k)^2$

$(AB)^2 = 576k^2 + 49k^2$

$(AB)^2 = 625k^2$

$AB = 25k$

$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{7k}{25k} = \frac{7}{25}$

$\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{7k}{25k} = \frac{7}{25}$

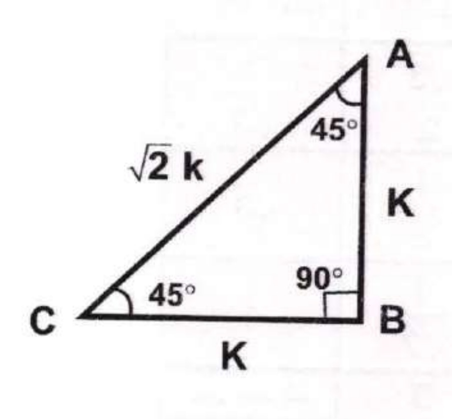
ملاحظة مهمة / اذا كان مجموع زاويتين يساوي 90° اي انهما زاويتان متتامتان فان جيب احداهما = جيب تمام الاخرى وبالعكس . كما في المثال السابق اعلاه .

النسب المثلثية للزوايا الخاصة 30° , 45° , 60°

1- زاوية قياسها 45°

نفرض ان $AB = K = 1 \ , \ BC = K = 1$

وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد $AC = \sqrt{2}$

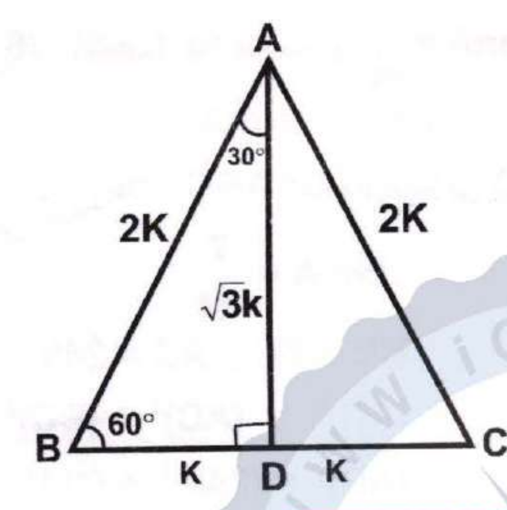


$\sin 45° = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45° = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC} = 1$

2- **زاوية قياسها** 30°

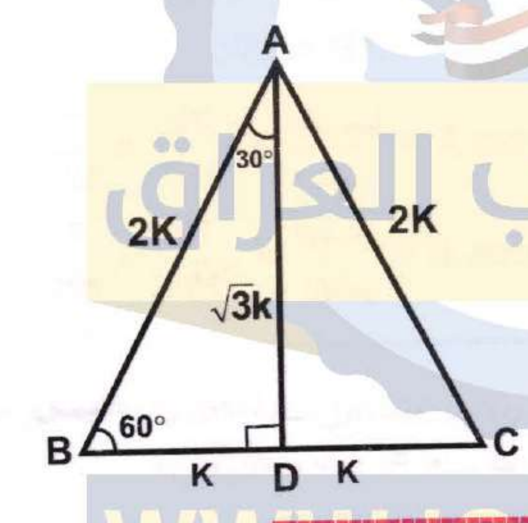


$\sin 30° = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3- **زاوية قياسها** 60°



$\sin 60° = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$

جدول النسب المثلثية للزوايا الخاصة 30° , 45° , 60°

الزوايا الخاصة θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
90°	1	0	غير معرف
zero° (0°)	0	1	0

مثال 7/ (كتاب) جد قيمة المقدار $\frac{3}{4}\tan^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ + 3\tan 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \tan 60^\circ$

الحل /

$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{المقدار} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3(1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\sqrt{3})$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\times 1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \sqrt{3} + 3 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + 3 + \frac{3}{4} = 1 + 3 = 4$$

مثال 8/ (كتاب) جد قيمة المقدار $4\cos 30^\circ \cos 45^\circ \sin 30^\circ \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

الحل /

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{المقدار} = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

مثال 9/ (كتاب) جد قيمة المقدار $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

الحل /

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{المقدار} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

دائرة الوحدة والنقطة المثلثية للزاوية

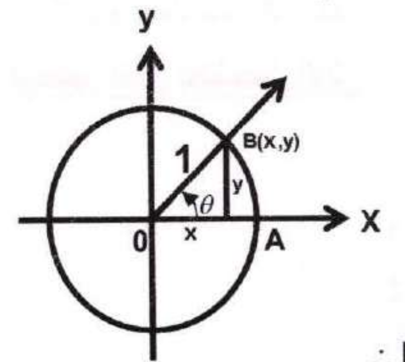
دائرة الوحدة / هي دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوي وحدة طول واحدة

النقطة المثلثية لزاوية / في الشكل ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{OB}$

لتكن $\overrightarrow{\measuredangle AOB}$ زاوية موجهة في الوضع القياسي ،
B نقطة تقاطع الضلع النهائي OB مع دائرة الوحدة
نفرض ان $B = (X , y)$

$$\sin\theta = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin\theta = y$$

$$\cos\theta = \frac{X}{1} \Rightarrow \cos\theta = X$$



$\therefore B = (X , y) = (\cos\theta , \sin\theta)$ تدعى بالنقطة المثلثية

ايجاد النسب المثلثية للزاوية $180° - \theta$

وتعلمنا سابقا قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة $30° , 45° , 60°$
لكي نتمكن من ايجاد قيمة اي زاوية :

في الربع الاول / تكون القيم للنسب المثلثية جميعها موجبة sin , cos , tan

في الربع الثاني / تكون قيمة الـ sin موجبة

$+\sin , -\cos , -\tan$

في الربع الثالث / تكون قيمة الـ tan موجبة

$-\sin , -\cos , +\tan$

في الربع الرابع / تكون قيمة الـ cos موجبة

$-\sin , +\cos , -\tan$

جا Sin | الكل ALL | ظا tan | جتا Cos

باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس على المستوى

يمكن ايجاد قيم النسب المثلثية للزوايا التي تقع في الربع الثاني حيث نجد ان :

$$\sin\left(180° - \theta\right) = +\sin\theta$$

$$\cos\left(180° - \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\tan\left(180° - \theta\right) = -\tan\theta$$

ولايجاد النسب المثلثية للزاوية $\left(180° - \theta\right)$ نقوم بما يلي :

① نقوم بطرح الزوايا الخاصة من الـ $180°$ فتكون الزاوية المطلوبة المراد ايجاد قيمتها .

مثل /

جد قيمة $\sin 120° , \cos 120° , \tan 120°$

② نلاحظ ان θ تقع في الربع الثاني /

③ نلاحظ ان $\sin(180° - 60°) = +\sin 60°$ لانه يقع في الربع الثاني

④ من الزوايا الخاصة نلاحظ ان $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} , \cos 60° = \frac{1}{2} , \tan 60° = \sqrt{3}$

فيكون الحل بالشكل الاتي

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = +\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$$

مثال 10/ (كتاب) جد قيمة $\cos120^\circ$, $\sin135^\circ$, $\tan150^\circ$

خطوات الحل

(1) نقوم بطرح الزوايا الخاصة من الـ 180° فتكون الزاوية المطلوبة المراد ايجاد قيمتها .

(2) $120^\circ = (180^\circ - 60^\circ)$, $135^\circ = (180^\circ - 45^\circ)$, $150^\circ = (180^\circ - 30^\circ)$

(3) في الربع الثاني يكون الـ $+\sin\theta$ (موجب) و $-\tan\theta$, $-\cos\theta$ (سالب)

(4) من الزوايا الخاصة نلاحظ ان

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} , \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} , \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

فيكون الحل بالشكل الاتي

الحل /

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos60^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = +\sin45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan30^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

اثرائيات

سؤال (اثرائي) لتكن $\left(\frac{1}{2}, L\right)$ نقطة مثلثية للزاوية الحادة θ جد قيمة $\tan\theta, L$

الحل /

$$\frac{1}{2} = \cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos60^\circ \Rightarrow \therefore \theta = 60^\circ$$

$$\because L = \sin\theta \Rightarrow L = \sin60^\circ \Rightarrow \therefore L = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \tan60^\circ \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$$

سؤال (اثرائي) لتكن $\left(N, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ نقطة مثلثية للزاوية الحادة θ جد قيمة $\tan\theta, N$

الحل /

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin45^\circ \Rightarrow \therefore \theta = 45^\circ$$

$$\because N = \cos\theta \Rightarrow N = \cos45^\circ \Rightarrow \therefore N = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = \tan45^\circ \Rightarrow \tan\theta = 1$$

تمارين (2 – 3)

1) جد القيمة العددية لكل مما ياتي :

(أ) $(\tan30° - \tan60°)(2\tan60°\tan45°)$

الحل / $\tan30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\tan60°=\sqrt{3}$ ، $\tan45°=1$

$$(\tan30° - \tan60°)(2\tan60°\tan45°) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}\times1\right) = \left(\frac{1-3}{\sqrt{3}}\right)\left(2\sqrt{3}\right)$$

المقدار $= \frac{-2}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{1} = -2\times2 = -4$

(ب) $(\sin30° + \cos60°)(\cos60° - \sin60°)$

الحل / $\sin30°=\frac{1}{2}$ ، $\cos60°=\frac{1}{2}$ ، $\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(\sin30° + \cos60°)(\cos60° - \sin60°) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

المقدار $= (1)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

(جـ) $3\cos30°\tan60° - 2\tan45° - \frac{1}{2}\sin60°$

الحل / $\sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan45° = 1$ ، $\tan60°=\sqrt{3}$ ، $\cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$3\cos30°\tan60° - 2\tan45° - \tfrac{1}{2}\sin60° = 3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\sqrt{3}\right) - 2\times(1) - \frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{1} - 2\times1 - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\times3}{2} - 2 - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{2} - \frac{2}{1} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

المقدار $= \frac{18-8-\sqrt{3}}{4} = \frac{10-\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

(د) $\cos^2 45° \sin60° \tan60° \tan^2 45° \cos^2 30°$

الحل / $\cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan45°=1$ ، $\tan60° = \sqrt{3}$ ، $\sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

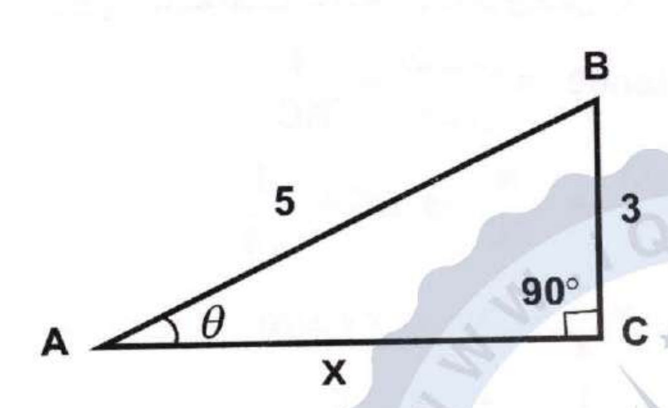
$$\cos^2 45° \sin60° \tan60° \tan^2 45° \cos^2 30°$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\sqrt{3}\right) \times (1)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

المقدار $= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

2) اذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ فجد $\tan\theta$, $\cos\theta$ حيث أن زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية

الحل /



$\overline{X} = \sqrt{(5)^2-(3)^2}$

$\overline{X} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16}$

$\overline{X} = 4$

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{4}$

3) برهن على ان المجموعتين المرتبتين:

$\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{\sin^2 30°, \sin^2 45°, \sin^2 60°, \sin^2 90°\}$ متناسبتان

الحل / $\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, (1)^2\right\}$

$\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

$\frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{1}{4}$, $1 \div 4 = \frac{1}{4}$

∴ المجموعتان متناسبتان

4) جد القيمة العددية لكل مما ياتي ، ثم جد النقطة المثلثية لكل منها

(أ) $\sin 150°$, $\cos 150°$ الحل /

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ب) $\tan 135°$, $\cos 135°$

الحل /

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

(جـ) $\sin 120°$, $\tan 120°$

الحل /

$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

5) ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه AC = 4cm ، $\angle B = 60^\circ$ جد مساحة المثلث ؟

الحل / نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في C

A, 30°, 4cm, 90°, 60°, B, C

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{4}{BC} \rightarrow BC = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{\sqrt{3}} cm^2 = 4.7\ cm^2$

6) سلم طوله 10 متر مرتكز بطرفه الاسفل على أرض افقية مستوية وطرفه الاعلى على حائط شاقولي فاذا كانت الزاوية بين السلم والارض 30° فما بعد طرفه الاعلى عن الارض ؟ وما بعد طرفه الاسفل عن الحائط ؟ $(\sqrt{3} = 1.7)$

الحل /

$$\sin 30^\circ = \frac{X}{10} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{X}{10}$$

$$2X = 10 \rightarrow X = \frac{10}{2} = 5\ m$$

بعد الطرف الاعلى عن الارض $X = 5\ m$

X, سلم, 10 m, 30°, y

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{10} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10}$$

$$2y = 10\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 5\sqrt{3}\ m \rightarrow y = 5 \times 1.73$$

بعد الطرف الاسفل عن الحائط $y = 8.63\ m$

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, L\right)$ نقطة مثلثية للزاوية الحادة θ، جد قيمة L , $\tan\theta$

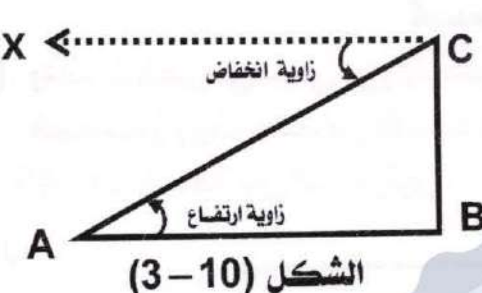
الحل /

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad L = \sin\theta = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad , \quad \boxed{L = \frac{1}{2}}$$

زوايا الارتفاع والانخفاض

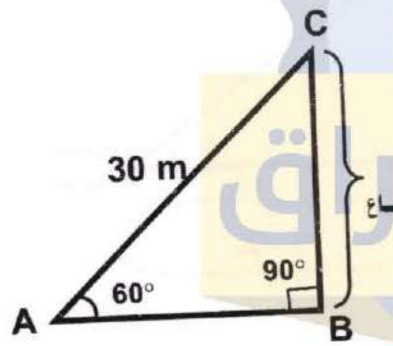


الشكل (10 – 3)

نتمكن من حساب الارتفاعات والابعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها فيها فاذا وقف راصد في نقطة A ونظر الى نقطة C التي تقع فوق أفق A فان الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة C وبين افق A تدعى زاوية ارتفاع C بالنسبة الى A مثل الزاوية $\measuredangle$ CAB في الشكل (10 – 3) أدناه

اما اذا كانت عين الراصد في C ونظر الى A التي تحت افق C فان الزاوية الكائنة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة A وبين افق C تدعى (زاوية انخفاض A بالنسبة الى C) مثل الزاوية ACX $\measuredangle$

مثال 11/ (كتاب) طائرة ورقية طول خيطها 30 متر فاذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الارض (افق) هي 60° جد ارتفاع الطائرة عن الارض .



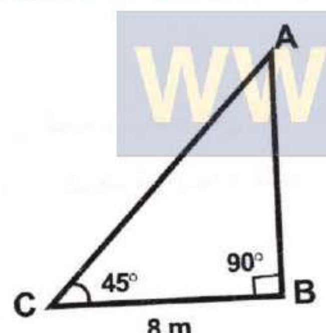
الحل / نفرض ان ارتفاع الطائرة عن الارض = L من الوحدات

$$\sin 60^\circ = \frac{L}{30^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{30^\circ} \rightarrow L = \frac{30\sqrt{3}}{2}$$

$L = 15\sqrt{3}$ m ارتفاع الطائرة

مثال 12/ (كتاب) وجد راصد ان زاوية ارتفاع قمة مأذنة من نقطة على الارض تبعد 8 متر عن قاعدتها تساوي 45° فما ارتفاع المئذنة ؟



الحل / $\triangle$ABC قائم الزاوية في B

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$1 = \frac{AB}{8}$$

$\therefore$ AB = 8 متر ارتفاع المأذنة

مثال 13/ (كتاب) جبل ارتفاعه 2350 متر وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الارض 30° فما هو البعد بين النقطة والراصد ؟

الحل / قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

$\triangle$ABC قائم الزاوية في B

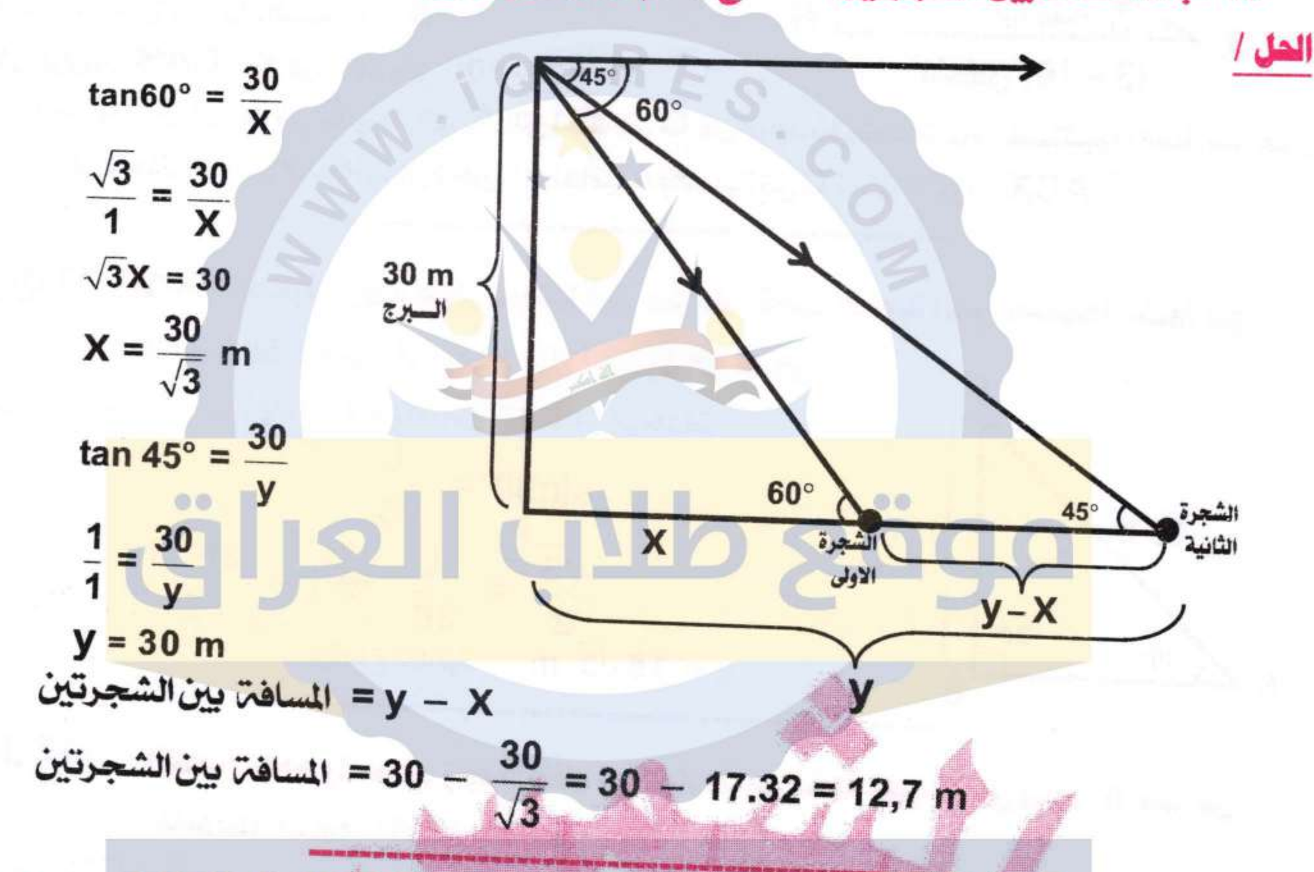
$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2350}{AC}$$

$\therefore$ AC = 4700 متر البعد بين النقطة والراصد

تمارين (3 - 3)

1) وقف شخص في اعلى برج وأبصر شجرتين تفعان مع قاعدة البرج على استقامة واحدة ، فكانت زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الاولى °60 وزاوية انخفاض قاعدة الشجرة الثانية °45 جد المسافة بين الشجرتين. مع العلم أن ارتفاع البرج 30 مترا .

الحل /



$$\tan 60^\circ = \frac{30}{X}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{30}{X}$$

$$\sqrt{3}X = 30$$

$$X = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{30}{y}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{30}{y}$$

$$y = 30 \text{ m}$$

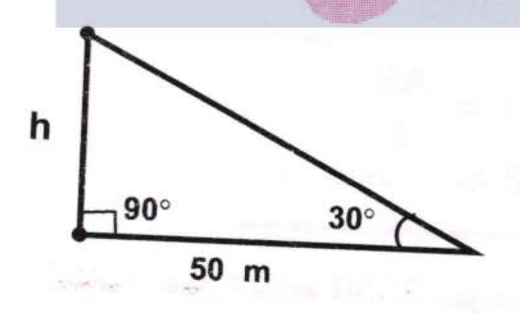
المسافة بين الشجرتين $= y - X$

المسافة بين الشجرتين $= 30 - \frac{30}{\sqrt{3}} = 30 - 17.32 = 12{,}7 \text{ m}$

---

2) من نقطة تبعد عن قاعدة مئذنة 50 مترا وجد أن زاوية ارتفاع قمتها °30 فما ارتفاع المئذنة

الحل / نفرض ان ارتفاع المئذنة = h



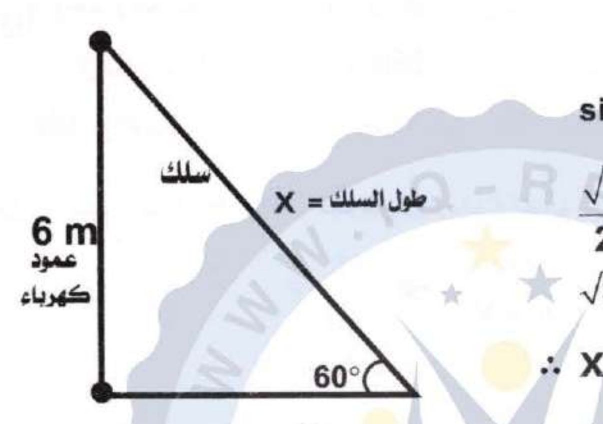
$$\tan 30^\circ = \frac{h}{50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{50}$$

$$\sqrt{3}\, h = 50$$

$$\therefore h = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28.9$$ متر ارتفاع المئذنة

3) عمود كهرباء طوله 6 أمتار مثبت شاقوليا (عموديا) على أرض أفقية ومربوط بسلك في نهايته العليا ومثبت على سطح الأرض وكان قياس الزاوية التي يصنعها السلك مع الارض $60°$ فما طول السلك .



الحل / نفرض ان طول السلك = X

$$\sin 60° = \frac{6\text{ m}}{X}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{X}$$

$$\sqrt{3}\,X = 12$$

$$\therefore X = \frac{12}{\sqrt{3}} = 6.93$$ متر طول السلك

---

4) وجد راصد زاوية ارتفاع منطاد مثبت هي $45°$ ولما سار الراصد في مستوى افقي نحو المنطاد مسافة 1000 متر شاهد ان زاوية الارتفاع هي $60°$ جد ارتفاع المنطاد

منطاد
h
60°
45°
راصد
X
1000 m

الحل / نفرض ان ارتفاع المنطاد = h

$$\tan 60° = \frac{h}{X}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{X}$$

$$h = \sqrt{3}\,X \quad \text{--------- (1)}$$

$$\tan 45° = \frac{h}{X + 1000}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{h}{X + 1000}$$

$$h = X + 1000 \quad \text{--------- (2)}$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$\sqrt{3}\,X = X + 1000$$

$$\sqrt{3}\,X - X = X - X + 1000$$

$$1.732X - X = 1000$$

$$0.732X = 1000$$

$$X = \frac{1000}{0.732}$$

$$X = 1366$$

$$h = \sqrt{3}\,X$$

$$h = \sqrt{3}\,X \times 1366$$

$$h = 2366\text{ m}$$ متر ارتفاع المنطاد

اثرائيات

سؤال (اثرائي) وجد رجل يجلس على ظهر زورق ان زاوية ارتفاع قمة عمود فوق سطح منزل تساوي $30°$ وبعد ان تحرك الزورق مسافة $60m$ في اتجاه العمود تماما وجد الرجل ان زاوية ارتفاع قمة العمود $60°$ وزاوية ارتفاع قاعدة العمود هي $30°$. احسب ارتفاع كل من العمود والمنزل

الحل / نفرض ان ارتفاع المنزل $= h_1$ ، نفرض ان ارتفاع العمود $= h_2$ ، نفرض ان ارتفاع العمود والمنزل $= y$

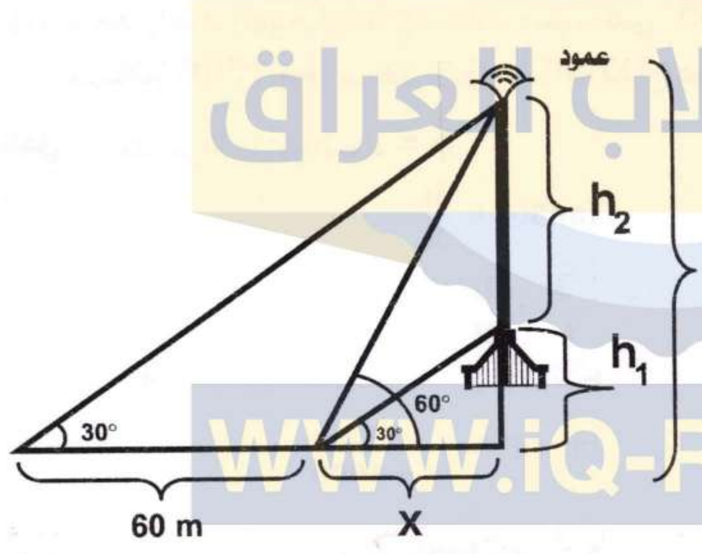
$$\tan30° = \frac{y}{60 + X} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{60 + X}$$

$$\sqrt{3}\, y = 60 + X \quad ---------- (1)$$

$$\tan60° = \frac{y}{X} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{y}{X}$$

$$y = \sqrt{3}\, X \quad ---------- (2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)



$$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}X\right) = 60 + X$$

$$3X = 60 + X$$

$$3X - X = 60 + X - X$$

$$2X = 60$$

$$X = \frac{60}{2} = 30 \text{ m}$$

$$\therefore X = 30 \text{ m}$$

نعوض قيمة X في معادلة (2)

$$y = \sqrt{3}\, X \quad ---------- (2)$$

$$y = \sqrt{3} \times (30)$$

$$\therefore y = 30\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\tan30° = \frac{h_1}{30} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h_1}{30}$$

$$h_1 = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ m}$$ ارتفاع المنزل

$$h_2 = y - h_1 \rightarrow$$

$$h_2 = 30\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$ ارتفاع العمود

الفصل الرابع

الهندسة الاحداثية

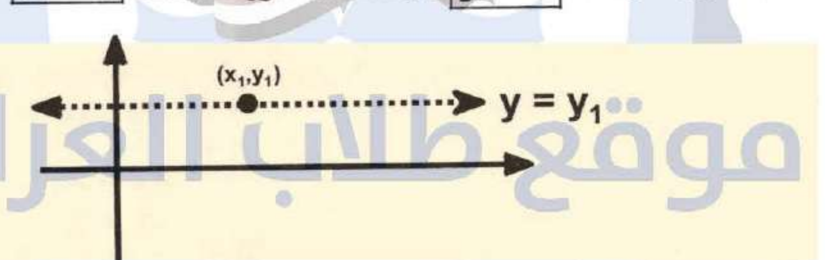
معادلة مجموعة نقاط في مستوى الاحداثي

يوجد نظام لقياس الزوايا يسمى التقدير الدائري ، وتسمى وحدة القياس فيه الزاوية النصف قطرية

(1) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي : $x = x_1$ ، وعندما $x_1 = 0$ فان المستقيم ينطبق على محور الصادات

(2) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي : $y = y_1$ ، وعندما $y_1 = 0$ فان المستقيم ينطبق على محور السينات

لذلك فان معادلة محور السينات $y = 0$ ، ومعادلة محور الصادات $x = 0$



معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين

لنفرض ان $a (x_1,y_1) , b (x_2,y_2) , c (x,y) \in \overleftrightarrow{ab}$

فتكون معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ab}$ هي $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

والتي تسمى بالمعادلة الكارتيزية لمستقيم مار بنقطتين

مثال 1/ (كتاب) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(3 , -1) , (-2 , 5)$

الحل /

$a (3,-1) , b (-2 , 5) , c (x,y) \in \overleftrightarrow{ab}$

$\therefore \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y+1}{x-3} = \frac{5+1}{-2-3} \rightarrow \frac{y+1}{x-3} \times \frac{6}{-5}$

$-5y - 5 = 6x - 18$

$6x + 5y - 18 + 5 = 0$

$6x + 5y - 13 = 0$ معادلة المستقيم

مثال 2/ (كتاب) جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة $(-3 , 5)$

الحل / لتكن $A(-3, 5) , O(0, 0)$

نجد معادلة المستقيم OA وهي $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{5-0}{-3-0} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{-3}$$

معادلة المستقيم $5y = -3y \rightarrow 5y + 3y = 0$

ميل المستقيم

اذا كانت $a(x_1,y_1) , b(x_2,y_2)$ فان ميل المستقيم $ab = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ بشرط $x_1 \neq x_2$

مثال 3/ (كتاب) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3 , -5) , (1 , -1)$

الحل / الميل $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

الميل $m = \dfrac{-1+5}{1-3} = \dfrac{4}{-2} = -2$

تعريف / اذا كانت θ هي قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم L مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فان $m\overleftrightarrow{L} = \tan\theta$ حيث - $\theta \in [0 , 180°) / \#90°$

مثال 4/ (كتاب) (أ) جد ميل المستقيم L_1 الذي يصنع $45°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
(ب) جد ميل المستقيم L_2 الذي يصنع $150°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل / ميل المستقيم $L_1 = \tan\theta$

$$m\overleftrightarrow{L_1} = \tan 45°$$

$$\therefore m\overleftrightarrow{L_1} = 1$$

كذلك ميل المستقيم $L_2 = \tan\theta$

$$m\overleftrightarrow{L_2} = \tan 150° \rightarrow m\overleftrightarrow{L_2} = \tan(180° - 30°)$$

$$m\overleftrightarrow{L_2} = -\tan 30° = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore m\overleftrightarrow{L_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

نتيجة /

(1) محور السينات أو أي مستقيم يوازي محور السينات فان ميله = 0

(2) محور الصادات او اي مستقيم يوازي محور الصادات فان ميله غير معرف

(3) معادلة المستقيم المار بالنقطة $a\ (x_1, y_1)$ وميله m فان معادلته هي

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

مثال 5/ (كتاب) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-3, 4)$ وميله $\frac{2}{3}$

الحل /

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad \text{المعادلة}$$

$$\left[y - 4 = \frac{2}{3}(x + 3)\right] \times 3$$

$$3y - 12 = 2(x + 3)$$

$$3y - 12 = 2x + 6$$

$$-2x + 3y - 18 = 0$$

$$2x - 3y + 18 = 0 \quad \text{معادلة المستقيم}$$

مثال 6/ (كتاب) جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 3)$ والذي يصنع $135°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل /

$$(x_1, y_1) = (-2, 3)$$

$$m = \tan 135°$$

$$m = \tan(180° - 45°)$$

$$m = -\tan 45°$$

$$m = -1$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -1(x + 2)$$

$$y - 3 = -x - 2$$

$$x + y - 1 = 0 \quad \text{معادلة المستقيم}$$

استنتاج ميل المستقيم من معادلته

نفرض ان معادلة المستقيم هي $aX + by + C = 0$ حيث $a , b , c \in R$
وكل من a , b لا يساويان صفرا معا .

(1) بوضع $y = 0$

$$\therefore aX + 0 \times y + C = 0 \rightarrow aX + C = 0 \rightarrow \boxed{X = \frac{-C}{a}}$$ المقطع السيني

وتمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي

(2) بوضع $X = 0$

$$\therefore 0 \times X + by + C = 0 \rightarrow by + C = 0 \rightarrow \boxed{y = \frac{-C}{b}}$$ المقطع الصادي

وتمثل معادلة مستقيم / المحور السيني

(3) ميل المستقيم المار بنقطتي تقاطع المستقيم $aX + by + C = 0$ مع المحورين الاحداثيين واللتان هما :

$\left(\frac{-C}{a}, 0\right) , \left(0, \frac{-C}{b}\right)$

يكون ميل المستقيم الذي معادلته $aX + by + C = 0$

يكون ميله $\frac{-a}{b} = m = -\frac{(\text{معامل } X)}{(\text{معامل } y)}$ بشرط X , y في طرف واحد من المعادلة وان $b \neq 0$

مثال 7/ (كتاب) جد ميل المستقيم $3X - 4y - 12 = 0$ ثم جد المقطعين السيني والصادي

الحل / معامل X هو 3 ومعامل y هو -4 ، $a = 3 , b = -4$

$$m = -\frac{(\text{معامل } X)}{(\text{معامل } y)} = -\frac{3}{-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

المقطع السيني $y = 0 \rightarrow 3X - 12 = 0 \rightarrow 3X - 12 + 12 = 0 + 12$

$$3X = 12 \rightarrow X = \frac{12}{3} = 4$$

المقطع الصادي $X = 0 \rightarrow -4y - 12 = 0 \rightarrow -4y - 12 + 12 = 0 + 12$

$$\rightarrow \frac{-4}{-4}y = \frac{12}{-4} \rightarrow y = \frac{12}{-4} = -3$$

العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين

اذا كان المستقيمان متوازيان فان ميلهما متساوي والعكس صحيح $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$

العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين

(1) اذا توازى مستقيمان فان ميلهما متساوي . اي ان اذا كان $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ فان $m_1 = m_2$

(2) اذا تساوى ميلا مستقيمين فانهما اي المستقيمان متوازيان.

$\overleftrightarrow{L_1}$ معادلته هي $a_1X + b_1y + C_1 = 0$

$\overleftrightarrow{L_2}$ معادلته هي $a_2X + b_2y + C_2 = 0$ اي ان $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

العلاقة بين ميلي مستقيمين متعامدين

(1) اذا كان تعامد مستقيمان فان حاصل ضرب ميلهما = -1.

اي انه اذا كان $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ فان $m_1 \times m_2 = -1$ أو $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

(2) أو ميل احدهما يساوي مقلوب ميل الاخر وبعكس الاشارة .

مثال 8/ (كتاب) برهن على تعامد المستقيمين $4X + 3y - 8 = 0$ ، $3X - 4y + 7 = 0$

الحل /

$3X - 4y + 7 = 0 \longleftrightarrow \overleftrightarrow{L_1}$ ، $4X + 3y - 8 = 0 \longleftrightarrow \overleftrightarrow{L_2}$

$$m_1 = -\frac{(\text{معامل } X_1)}{(\text{معامل } y_1)} = -\frac{3}{-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$m_2 = -\frac{(\text{معامل } X_2)}{(\text{معامل } y_2)} = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$m_1 \times m_2 = \frac{3}{4} \times \frac{-4}{3} = -1$$

$$\therefore \overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$$

مثال 9/ (كتاب) جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة $(-2, 1)$

ويوازي المستقيم $3y - 2x + 7 = 0$

الحل / $\overleftrightarrow{L} \longleftrightarrow 3y - 2x + 7 = 0$

$$m\overleftrightarrow{L} = -\frac{(\text{معامل } x)}{(\text{معامل } y)} = -\frac{-2}{3} = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$$

المستقيمان متوازيان ← ميل المستقيم المطلوب = $\frac{2}{3}$

معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل [نقطة ومستقيم]

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y-1) = \frac{2}{3}(x+2)$$

$$3(y-1) = 2(x+2)$$

$$3 \times y - 3 \times 1 = 2 \times x + 2 \times 2$$

$$3y - 3 = 2x + 4$$

$$-2x + 3y = 7$$

$$2x - 3y + 7 = 0$$ معادلة المستقيم

مثال 10/ (كتاب)

جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة $(3, -5)$ وعمودي على المستقيم $3x + y = 1$

الحل / $\overleftrightarrow{L} \longleftrightarrow 3x + y = 1$

$$m\overleftrightarrow{L} = -\frac{(\text{معامل } x)}{(\text{معامل } y)} = -\frac{3}{1} = -3$$

بما ان المستقيمان متعامدان ، اذن ميل المستقيم المطلوب = $\frac{1}{3}$

[لان المستقيمان متعامدان] $m_1 \times m_2 = -1 \rightarrow -\frac{1}{3} \times 3 = -1$

معادلة المستقيم المطلوب بدلالة نقطة وميل هي : $(y - y_1) = m(x - x_1)$

$$(y+5) = \frac{1}{3}(x-3)$$

$$3y + 15 = x - 3$$

$$x - 3y - 18 = 0$$ معادلة المستقيم المطلوب

تمارين (1 - 4)

اولا : (1) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (0 , 2) , (0 , 2-)

الحل /

$$\text{الميل } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{الميل } m = \frac{0 - 0}{2 + 2} = \frac{0}{4} = 0$$

---

(2) اذا كانت (3- ,b (w , (3 , 2) a فجد قيمة w بحيث يكون ميل $\overleftrightarrow{ab} = \frac{1}{2}$

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-3 - 3}{w - 2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-6}{w - 2}$$

$$w - 2 + 2 = -12 + 2$$

$$w = -10$$

ثانيا : لكل فقرة مما ياتي اربع اجابات واحدة فقط صحيحة. حدد الاجابة الصحيحة لكل فقرة

(1) اذا كان $\overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{M}$ يمر بالنقطتين (1 , 5) , (2 , 3) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ =

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 2 (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{-2}{3}$

الجواب /

$$m_{\overleftrightarrow{M}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{5-3} = \frac{-1}{2}$$

بما ان $\overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{L}$ مستقيمان متعامدان ، اذن ميل $m\overleftrightarrow{L} = 2$

---

(2) اذا كان $\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{M}$ يمر بالنقطتين (3- , 2) , (3 , 2-) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ =

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{-3}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{-2}{3}$

الجواب /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-3}{2-(-2)} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

بما ان $\overleftrightarrow{M} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ مستقيمان متوازيان ، اذن $m\overleftrightarrow{L} = m\overleftrightarrow{M} = \frac{-3}{2}$

ثالثا : (1) بين أن المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ المار بالنقطتين $(6 , 1)$, $(3 , -1)$ يوازي المستقيم $\overleftrightarrow{M}$ المار بالنقطتين $(-1 , 0)$, $(-4 , -2)$

الحل /

$$m\overleftrightarrow{L} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$$m\overleftrightarrow{M} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 + 1}{-2 - 0} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

بما ان المستقيمان $\overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{M}$ ميلهما متساوي

اذن المستقيمين $\overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{M}$ متوازيان

---

(2) بين ان المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ المار بالنقطتين $(0 , 2)$, $(5 , 0)$ عمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{M}$ المار بالنقطتين $(1 , 6)$, $(-1 , 1)$

الحل /

$$m\overleftrightarrow{L} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 5}{2 - 0} = \frac{-5}{2}$$

$$m\overleftrightarrow{M} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 + 1}{6 - 1} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{-5}{2} \times \frac{2}{5} = -1$$

بما ان الميلين $m_1 \times m_2 = -1$

اذن المستقيمين $\overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{M}$ متعامدان

رابعا : (1) جد معادلة المستقيم الذي ميله $= \frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(0 , -4)$

الحل /

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$$

$$\left[(y + 4) = \frac{1}{2}(x - 0)\right] \times 2 \rightarrow 2 \times y + 2 \times 4 = 1 \times x - 1 \times 0$$

$$2y + 8 = x - 0$$

$$-x + 2y + 8 = 0$$

معادلة المستقيم $x - 2y - 8 = 0$

---

(2) جد معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (2 , 1−)

الحل / بما ان المستقيم موازي // محور السينات
اذن ميل المستقيم = 0

$$(y-y_1) = m(x-x_1)$$

$$(y+1) = 0(x-2) \rightarrow y+1=0$$

$y = -1$ معادلة المستقيم

---

(3) جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (2 , 1−)

الحل / كل مستقيم // محور الصادات فان ميله غير معرف

أي ان ميل المستقيم $m = \frac{1}{0}$

$$m = \frac{(y-y_1)}{(x-x_1)} \rightarrow \frac{1}{0} = \frac{(y-(-1))}{(x-2)}$$

$$\frac{1}{0} = \frac{(y+1)}{(x-2)}$$

$$1(x-2) = 0(y+1)$$

$$x-2=0$$

$x = 2$ معادلة المستقيم

---

(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3 , 1−) (5 , 1−)

الحل / بما ان الاحداثي السيني ثابت
والاحداثي الصادي متغير
اذن المستقيم يوازي // محور الصادات
وهذا يعني ان معادلة المستقيم هي $x = -1$

(−1 , 3)
ثابت ↕ متغير ↕
(−1 , 5)

طريقة ثانية للحل /

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \rightarrow \frac{y-5}{x-(-1)} = \frac{3-5}{-1-(-1)}$$

$$\frac{y-5}{x+1} = \frac{3-5}{-1+1}$$

$$\frac{(y-5)}{(x+1)} = \frac{-2}{0}$$

$$0(y-5) = -2(x+1)$$

$$0 = -2x-2$$

$$0 = 2x+2$$

$$x+1=0$$

$x = -1$ معادلة المستقيم

(5) جد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ المار بالنقطة (1- , 2) والموازي للمستقيم الذي ميله $= \frac{2}{3}$

الحل / بما ان المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ موازي للمستقيم الذي ميله $= \frac{2}{3}$

بما ان المستقيمان متوازيان يعني ان $\overleftrightarrow{L_1} = \overleftrightarrow{L_2}$ ، اذن $m_1 = m_2 = \frac{2}{3}$

والسبب / اذا كان المستقيمان متوازيان فان ميلهما متساوي والعكس صحيح

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow \overleftrightarrow{L_1} = \overleftrightarrow{L_2}$$

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$$

$$\left[(y + 1) = \frac{2}{3}(x - 2)\right] \times 3 \rightarrow 3 \times y + 3 \times 1 = 2 \times x - 2 \times 2$$

$$3y + 3 = 2x - 4$$

$$-2x + 3y + 3 + 4 = 0$$

$$-2x + 3y + 7 = 0$$

$$2x - 3y - 7 = 0$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ $\quad 2x - 3y - 7 = 0$

---

(6) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2- , 0) عموديا على المستقيم الذي ميله $= \frac{-3}{5}$

الحل / نرمز للمستقيم المار بالنقطة $\overleftrightarrow{L} = (0 , -2)$ ،

نرمز للمستقيم الذي ميله $= \overleftrightarrow{R} = \frac{-3}{5}$

$\overleftrightarrow{R} \perp \overleftrightarrow{L}$ لان المستقيمان متعامدان $m\overleftrightarrow{L} = \frac{5}{3}$ اذن

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$$

$$\left[(y + 2) = \frac{5}{3}(x - 0)\right] \times 3$$

$$3 \times y + 3 \times 2 = 5 \times x - 5 \times 0$$

$$3y + 6 = 5x$$

$$-5x + 3y + 6 = 0$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ $\quad 5x - 3y - 6 = 0$

(7) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (5− , 1−) والذي يصنع زاوية قياسها °150 مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل /

$$m = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$$

$$\left[(y + 5) = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x + 1) \right] \times \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \times y + \sqrt{3} \times 5 = -1(x + 1)$$

$$\sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = -x - 1$$

$$x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = -1$$

$$x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} + 1 = -1 + 1$$

$$x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} + 1 = 0$$

خامسا : (1) جد الميل والمقطع السيني والصادي لكل مستقيم فما ياتي :

(أ) $\overleftrightarrow{L_1} : 2x - 3y + 5 = 0$

الجواب /

$$m = -\frac{(\text{معامل } x)}{(\text{معامل } y)} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

المقطع السيني $x = \frac{-C}{a} = \frac{-5}{2}$

المقطع الصادي $y = \frac{-C}{b} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

(ب) $\overleftrightarrow{L_2} : 8y = 4x + 16$

الجواب / $4x - 8y + 16 = 0$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

المقطع السيني $x = \frac{-C}{a} = \frac{-16}{4} = -4$

المقطع الصادي $y = \frac{-C}{b} = \frac{-16}{-8} = 2$

(جـ) $\overleftrightarrow{L_3} : 3y = -4$

الجواب / $3y + 4 = 0$

$$m = -\frac{(\text{معامل } x)}{(\text{معامل } y)} = -\frac{a}{b} = -\frac{0}{3} = 0$$

المقطع السيني $x = \frac{-C}{a} = \frac{-4}{0}$ غير معرف

المقطع الصادي $y = \frac{-C}{b} = \frac{-4}{3}$

∴ الميل = صفر ، ∴ المستقيم // محور السينات

(2) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (5− , 2) ويوازي المستقيم الذي معادلته $2x - y + 3 = 0$

الحل / نفرض ان المستقيم المار بالنقطة $\overleftrightarrow{L} = (2, -5)$ ،

نرمز للمستقيم الذي معادلته $\overleftrightarrow{M} = 2x - y + 3 = 0$

بما ان المستقيمان متوازيان يعني ان $m\overleftrightarrow{M} = m\overleftrightarrow{L}$

$$m\overleftrightarrow{M} = -\frac{(\text{معامل } x)}{(\text{معامل } y)} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2 \;,\; \therefore m\overleftrightarrow{L} = 2$$

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)} \rightarrow (y + 5) = 2(x - 2)$$

$$y + 5 = 2x - 4 \rightarrow 2x - y - 4 - 5 = 0$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ $\quad 2x - y - 9 = 0$

---

(3) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2 , 2−) عموديا على المستقيم الذي معادلته $x + y = 0$

الحل / نفرض ان المستقيم المار بالنقطة $(2 , -2) = \overleftrightarrow{L}$

نرمز للمستقيم الذي معادلته $\overleftrightarrow{M} = x + y = 0$

بما ان المستقيمان متعامدان $\therefore m\overleftrightarrow{L} \times m\overleftrightarrow{M} = -1$

$$m\overleftrightarrow{L} = \frac{1}{m\overleftrightarrow{M}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)} \rightarrow (y + 2) = 1(x - 2)$$

$$y + 2 = x - 2$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ $\quad x - y - 4 = 0$

سادسا : اذا كان معادلة $\overleftrightarrow{L}$ هي : $wx - 8y = 7$ ومعادلة $\overleftrightarrow{M}$ هي : $5x + 2y = 11$ فجد قيمة w اذا كان

(1) $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}$	(2) $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{M}$
الجواب /	الجواب /
$m\overleftrightarrow{L} = m\overleftrightarrow{M}$	$\therefore m\overleftrightarrow{L} \times m\overleftrightarrow{M} = -1$
$\frac{-w}{-8} = \frac{-5}{2} \rightarrow -2w = 40$	$\frac{-w}{-8} \times \frac{-5}{2} = -1 \rightarrow 5w = 16$
$w = \frac{40}{-2} = -20$	$w = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

الفصل الخامس

الاحصاء

المنحنيات المتجمعة / تناولنا في السابق الجداول التكرارية ذات الفئات والجدول التالي يعطينا فكرة تفصيلية على التوزيع حسب الفئات : توزيع السلع في احدى المخازن حسب فئات الوزن بالكيلوغرام

فئات الوزن (كغم)	التكرار (عدد السلع)
20–	2
25–	4
30–	5
35–	7
40–	12
45–	8
50–	7
55 – 60	5

الجدول رقم (1)

من الجدول (1) نجد ان عدد السلع التي يتراوح وزنها بين 25 كغم الى اقل من 30هي (4) وكذلك عد السلع التي تتراوح وزنها بين 50 الى 55 كغم هي (7) سلع والتي يهمنا التعرف على بيانات اخرى اجمالية بدلا من البيانات التفضيلية فمثلا نحتاج الى معرفة عدد السلع التي تقل أوزانها عن 30 كغم وهي في هذه الحالة (6) سلع وتحصل عليها بجمع التكرارات في الفئتين الاولى والثانية وكذلك تحتاج الى معرفة عدد السلع التي تبلغ اوزانها (45) كغم فأكثر وهي (20) سلعة وتحصل عليها بجمع التكرارات في الفئات الثلاثة الاخيرة لذلك نحتاج الى تكوين جداول تكرارية متجمعة وفي هذا الجدول يتم تجميع التكرارات من احد طرفي الجدول الى الطرف الاخر والجداول التكرارية نوعان :

أولا – الجدول المتجمع الصاعد /

في هذا النوع من الجداول يتم تجميع التكرارات من جهة الفئات الصغيرة الى جهة الفئات الكبيرة

(اي من اعلى الجدول التكراري الى اسفله) ويتكون هذا الجدول من عمودين : **الاول** للحدود العليا للفئات **والثاني** للتكرار المتجمع الصاعد كما في المثال الاتي :

مثال 1/ (كتاب) كون الجدول المتجمع الصاعد للبيانات الموجودة في الجدول (1)

الحل / (1) تكون جدول من عمودين

(2) يخصص العمود الاول للحدود العليا للفئات وهي أقل من 25 كغم ، أقل من 30 كغم ، ... وهكذا

(3) يخصص العمود الثاني للتكرارات المتجمعة الصاعدة والتي نحصل عليها من الجدول رقم (1) حيث نجد ان عدد تكرارات القيم أقل من 25 هي (2) ، وتكرارات القيم التي أقل من 30 هي $6 = 4 + 2$ والتي أقل من 35 هي $11 = 5 + 4 + 2$ ، وهكذا نضيف التكرار بالتالي الى المجموع السابق في كل خطوة حتى نصل الى مجموع التكرارات كآخر تكرار متجمع وكما في الجدول رقم (2)

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 25 كغم	2
أقل من 30 كغم	6
أقل من 35 كغم	11
أقل من 40 كغم	18
أقل من 45 كغم	30
أقل من 50 كغم	38
أقل من 55 كغم	45
أقل من 60 كغم	50

الجدول رقم (2)

ثانيا – الجدول المتجمع النازل /

في هذا الجدول تجمع التكرارات من جهة الفئات الكبير الى جهة الفئات الصغيرة

(اي من أسفل الجدول التكراري الى أعلاه) ويتكون هذا الجدول أيضا من عمودين : **الاول** للحدود الدنيا للفئات **والثاني** للتكرار المتجمع النازل كما في المثال الاتي :

مثال 2/ (كتاب) كون الجدول المتجمع النازل للبيانات الموجودة في الجدول (1)

الحل / (1) تكون جدول من عمودين

(2) يخصص العمود الأول للحدود الدنيا للفئات وهي 20 كغم، فأكثر من 25 كغم فأكثر

(3) نخصص العمود الثاني للتكرارات المتجمعة النازلة والتي نحصل عليها من الجدول رقم (1) حيث عدد تكرارات القيم التي تساوي 20 فأكثر هي (50)، وان تكرار القيم التي تساوي 25 فأكثر هي 48 = 2 − 50 والتي تساوي 30 فأكثر هي (44)، وهكذا نطرح التكرار السابق في كل خطوة حتى نصل الى آخر تكرار وكما في الجدول رقم (3)

الحدود الدنيا للفئات	التكرار المتجمع النازل
20 فأكثر	50
25 فأكثر	48
30 فأكثر	44
35 فأكثر	39
40 فأكثر	32
45 فأكثر	20
50 فأكثر	12
55 فأكثر	5

الجدول رقم (3)

تمثيل البيانات

(أ) لمنحني المتجمع الصاعد /

لتمثيل المنحني المتجمع الصاعد، نرسم محورين متعامدين ونخصص المحور الأفقي للحدود العليا للفئات، والراسي للتكرارات المتجمعة، ثم نؤشر النقط على الشكل بحيث تكون الاحداثيات السينية للنقاط هي الحدود العليا للفئات ثم نصل هذه النقط بخط ممهد لتكون لدينا منحني صاعد يبدأ من أصغر تكرار متجمع وينتهي بالتكرار الكلي.

مثال 3/ (كتاب) أرسم المنحني المتجمع الصاعد من بيانات الجدول (2)

الحل / (1) نرسم عمودين

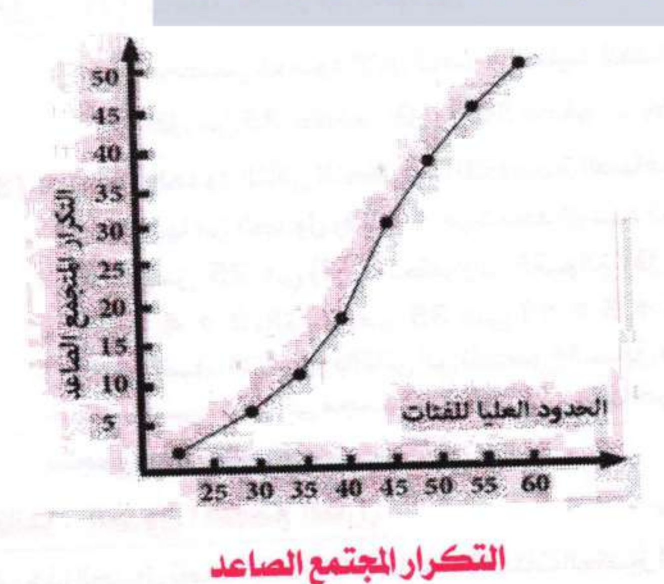
ونقسم المحور الافقي حسب الحدود العليا للفئات الموجودة في الجدول وهي .... , 30 , 25

(2) ونقسم المحور الراسي الى اقسام متساوية

بحيث تشمل مجموع التكرارات،

(3) ثم نؤشر النقط بحيث تاخذ الحد الاعلى للفئة مع التكرار المتجمع الصاعد.

اي (2 , 25) , (6 , 30) , (50 , 60)

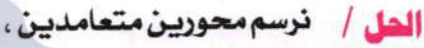


التكرار المجتمع الصاعد

(ب) لمنحني المتجمع النازل /

في هذا الجدول تجمع التكرارات من جهة الفئات الكبيرة الى جهة الفئات الصغيرة (اي من اسفل الجدول التكراري الى اعلاه) ويتكون هذا الجدول أيضا من عمودين **الاول** للحدود الدنيا للفئات **والثاني** للتكرار المتجمع النازل .

مثال 4/ (كتاب) أرسم المنحني المتجمع النازل من بيانات الجدول (3)



الحل / نرسم محورين متعامدين ،
ونقسم المحور الافقي حسب الحدود الدنيا للفئات الموجودة في الجدول وهي .... , 25 , 20
ونقسم المحور الراسي الى اقسام متساوية بحيث تشتمل على مجموع التكرارات ثم نؤشر النقاط بعد ذلك باخذ الحد الادنى للفئة مع التكرار المتجمع النازل
(50 , 20) ، (48 , 25) ، ... ، (5 , 55)
وبعد ذلك نصل هذه النقط بخط مستقيم ممهد لنحصل على منحني المتجمع النازل

مقاييس النزعة المركزية

سوف نتناول أهم مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال) وتختلف هذه المقاييس الثلاثة من حيث الفكرة وطريقة الحساب وان لكل منها مزايا وعيوب كما ان هناك بعض الحالات التي يستخدم فيها احد المقاييس دون الاخر.

الوسط الحسابي

الوسط الحسابي لمجموعة قيم / انه القيمة التي لو حلت مكان قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الاصلية وبالتالي فان الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها ويرمز له $\overline{X}$

طريقة حساب الوسط الحسابي /

اولا – البيانات غير المبوبة /

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ وبالرمز $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots\dots\dots + X_n}{n}$

مثال 5/ (كتاب) اذا كانت اعمار خمسة اشخاص هي : 5 سنوات ، 8 سنوات ، 9 سنوات ، 12 سنة ، 11 سنة أحسب الوسط الحسابي للاعمار

الحل / الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\overline{X} = \frac{5 + 8 + 9 + 11 + 12}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{45}{5} = 9$$

ثانيا – البيانات المبوبة / الوسط الحسابي للتوزيع التكراري البسيط

الوسط الحسابي = مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها / مجموع التكرارات

تعني الوسط الحسابي = $\overline{X}$ ، رمز المجموع = $\sum$ ، $\overline{X} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1}$

مثال 6/ (كتاب)

هب أن هناك (3) أشخاص عمر كل منهم 8 سنوات ،
و (5) أشخاص عمر كل منهم 9 سنوات
و (4) أشخاص عمر كل منهم 11 سنة
وشخصين اثنين عمر كل منهم 12 سنة كما في الجدول
أحسب الوسط الحسابي للعمر

العمر	عدد الاشخاص
8	3
9	5
11	4
12	2

الحل / نرمز للعمر بالرمز X ، ونرمز للعدد الاشخاص بالرمز f

العمر (X)	التكرار (عدد الاشخاص) f	(X.f)
8	3	$8 \times 3 = 24$
9	5	$9 \times 5 = 45$
11	4	$11 \times 4 = 44$
12	2	$12 \times 2 = 24$
المجموع	$\sum f = 14$	$\sum(xf) = 137$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} = \frac{137}{14} = 9.786$$

الوسط الحسابي للتوزيع التكراري ذي الفئات /

مثال 7/ (كتاب) أحسب الوسط الحسابي من الجدول التالي الذي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكيلوغرام

فئات الوزن	30 –	40 –	50 –	60–	70 –	80 – 90	المجموع
عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11	100

الحل / (1) نوجد مركز كل فئة

مركز الفئة الاولى = $\frac{40 + 30}{2} = \frac{70}{2} = 35$ ، مركز الفئة الثانية = $\frac{50 + 40}{2} = \frac{90}{2} = 45$

يرمز لمركز الفئة (X) وهو عبارة عن مجموع فئتين متتاليتين $\div 2$

(2) نضرب مركز كل فئة (X) في تكرارها (f)

(3) نوجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية $\overline{X} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1}$

فئات الوزن	مركز الفئات (X)	التكرار f	العمر (X.f)
30 –	35	9	315
40 –	45	15	675
50 –	55	22	1210
60 –	65	25	1625
70 –	75	18	1350
80 – 90	85	11	935
		$\sum f = 100$	$\sum (xf) = 6110$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} = \frac{6110}{100} = 61.1$$ كيلوغرام

مثال 8/ (كتاب) جد الوسط الحسابي من الجدول

الفئات	8 –	10 –	12 –	14 –	16 –	18 –	
التكرار	5	15	20	10	6	4	المجموع 60

الحل /

فئات الوزن	مركز الفئات (X)	التكرار (فئات الوزن) f	(X.f)
8 –	9	5	$9 \times 5 = 45$
10 –	11	15	$11 \times 15 = 165$
12 –	13	20	$13 \times 20 = 260$
14 –	15	10	$15 \times 10 = 150$
16 –	17	6	$17 \times 6 = 102$
18 –	19	4	$19 \times 4 = 76$
		$\sum f = 60$	$\sum (xf) = 798$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} = \frac{798}{60} = 13.3$$ الوسط الحسابي

مزايا الوسط الحسابي / (1) يمتاز بالسهولة والبساطة في العمليات الحسابية

(2) تدخل جميع القيم في حسابه

عيوب الوسط الحسابي / (1) يتاثر بالقيم الشاذة وهي التي تكون كبيرة جدا أو صغيرة جدا بالنسبة لمعظم القيم وبالتالي فهي ترفع قيمة الوسط عن معظم القيم

(2) لا يمكن ايجاده بيانيا

الوسيط

الوسيط / وهو القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا وبالتالي فان عدد القيم الاصغر منه يكون مساويا لعدد القيم الاكبر منه

طريقة حساب الوسيط /

أولا – الطريقة في البيانات الغير مبوبة

ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا او تنازليا ثم ناخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط ، هذا اذا كان عدد القيم فرديا .

اما اذا كان عدد القيم زوجيا فناخذ القيمتين اللتين في المنتصف نقوم بجمعهما ثم نقسم المجموع على 2 لنحصل على الوسيط

مثال (اثرائي) أحسب الوسيط لأوزان الطلاب التالية بالكيلوغرام : 55 , 63 , 50 , 58 , 51

الحل / نرتب القيم تنازليا 50 , 51 , 55 , 58 , 63

القيمة التي في المنتصف هي قيمة الوسيط = 55

مثال 9/ (كتاب) أحسب الوسيط لأوزان الطلاب التالية بالكيلوغرام : 55 , 63 , 50 , 58 , 52

الحل / نرتب القيم تصاعديا 63 , 58 , 55 , 52 , 50 ، نلاحظ ان القيمة التي في المنتصف هي الثالثة

اذن قيمة الوسيط = 55

مثال 10/ (كتاب) أحسب الوسيط لأوزان الطلاب التالية بالكيلوغرام : 55 , 57 , 63 , 50 , 58 , 25

الحل / نرتب القيم تصاعديا 63 , 58 , 57 , 55 , 50 , 25

$25 , 50 , \overset{\text{القيمة الثانية}}{55} , \overset{\text{القيمة الثالثة}}{57} , 58 , 63$

ناخذ القيمة الاولى وهي $\frac{n}{2} \leftarrow \frac{6}{2} = 3$ القيمة الاولى هي الثالثة في الترتيب

وناخذ القيمة الثانية وهي $\frac{n}{2} + 1 \leftarrow \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$ القيمة الثانية هي الرابعة في الترتيب

اي ان قيمة الوسيط تنحصر بين القيمتين الثالثة والرابعة في الترتيب

اذن قيمة الوسيط $\frac{55 + 57}{2} = \frac{112}{2} = 56$

ثانيا – الطريقة في البيانات المبوبة

(1) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري

(2) حساب ترتيب الوسيط وهو = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$

(3) تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى الفئة الوسيطية وهي الفئة التي تقابل أول تكرار أكبر أو يساوي ترتيب الوسيط

(4) قيمة الوسيط = الحد الادنى للفئة الوسيطية + $\frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}}$ × طول الفئة

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_b}{f_m} \times w$$

حيث f_b = التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية

f_m = تكرار الفئة الوسيطية ، f = التكرار ، w = طول الفئة

ME = الوسيط ، L = الحد الادنى للفئة الوسيطية

مثال 11/ (كتاب) جد وسيط الوزن من الجدول التالي

فئات الوزن	تكرار عدد الاشخاص	التكرار المتجمع الصاعد
– 30	9	9
– 40	15	24
– 50 (الفئة قبل الوسيطية)	22	46 (التكرار المتجمع الصاعد)
– 60 (الفئة الوسيطية)	25 (اكبر تكرار)	71
– 70	18	89
80 – 90	11	100
	المجموع 100	

الحل / ترتيب الوسيط $= \frac{100}{2} = 50$ ، الفئة الوسيطية هي $W = 70 - 60 = 10$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_b}{f_m} \times W$$

$$ME = 60 + \frac{50-46}{25} \times 10$$

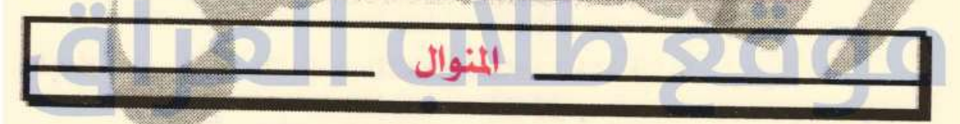
$$ME = 60 + \frac{40}{25} = 60 + 1.6 = 61.6$$ الوسيط

مزايا الوسيط / (1) لا يتاثر بالقيم الشاذة او المتطرفة

(2) يمكن ايجاده بيانيا

عيوب الوسيط / (1) لا تدخل جميع القيم في حسابه

(2) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات تستخدم طريقة تقريبية في حسابه



المنوال

المنوال / وهي القيمة الاكثر تكرارا أو التي تقابل أكبر التكرارات ويرمز له بالرمز (MO)

مثال 12/ (كتاب) ما القيمة المنوالية لمجموعة الاعداد الآتية : 4 , 2 , 4 , 8 , 3 , 4 , 9 , 7 , 4

الحل / القيمة المنوالية = 4 لانها تكررت أكثر من غيرها

طريقة الفرق لحساب المنوال في البيانات المبوبة

المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1 + d_2}$ × طول الفئة المنوالية

حيث d_1 = الفرق بين التكرار المنوالي والتكرار السابق له

d_2 = الفرق بين التكرار المنوالي والتكرار اللاحق له

والتكرار المنوالي هو أكبر تكرار في الجدول

والفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار

مثال 13/ **(كتاب) أحسب المنوال من الجدول**

فئات	التكرار
30 –	9
40 –	15
50 –	22 ← التكرار السابق
60 –	25 ← التكرار المنوالي
70 –	18 ← التكرار اللاحق
80 – 90	11

الحل /

$d_1 = 25 - 22 = 3$

$d_2 = 25 - 18 = 7$

طول الفئة المنوالية $70 - 60 = 10$

المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1 + d_2}$ × طول الفئة المنوالية

المنوال $MO = 60 + \frac{3}{3 + 7} \times 10 = 60 + 3 = 63$

مزايا المنوال / (1) بسيط من حيث الفكرة أو طريقة ايجاده

(2) لا يتاثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة

عيوب الوسيط / (1) رغم تعدد طرق حسابه الا انها طرق تقريبية

(2) في بعض الحالات لا يمكن ايجاد المنوال

(3) في بعض الاحيان يكون هنالك اكثر من منوال مما يضع الطالب في حيرة وارباك

مثال (اثرائي) **أحسب المنوال من الجدول التالي**

فئات	التكرار
40 –	6
50 –	43 ← التكرار السابق
60 –	59 ← التكرار المنوالي
70 –	35 ← التكرار اللاحق
80 –	8
90 – 100	2

الحل /

$d_1 = 59 - 43 = 16$

$d_2 = 59 - 35 = 24$

طول الفئة المنوالية $70 - 60 = 10$

المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1 + d_2}$ × طول الفئة المنوالية

المنوال $MO = 60 + \frac{16}{16 + 24} \times 10 = 60 + 4 = 64$

تمارين (1 - 5)

(1) البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب : 15 , 17 , 16 , 18 , 15 , 17 , 18 , 17 , 19

جد كل مما ياتي : (أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط (جـ) المنوال

(أ) الوسط الحسابي

الحل / $\overline{X} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} = \frac{19 + 17 + 18 + 17 + 15 + 18\ 16 + 17 + 15}{9}$

$\overline{X} = \frac{152}{9} = 16.88$ الوسط الحسابي

(ب) الوسيط

الحل / نرتب القيم تصاعديا 19 , 18 , 18 , 17 , 17 , 17 , 16 , 15 , 15

القيمة التي في المنتصف هي قيمة الوسيط = 17

(جـ) المنوال

الحل / القيمة المنوالية = 17 لانها تكررت أكثر من غيرها

(2) اذا فرضنا أن الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في أحد الصفوف بمادة الرياضيات للعام الماضي هي (80) درجة وفي العام الذي قبله (75) درجة . واذا فرضنا أن عدد طلاب الصف في العام الماضي (20) طالبا وفي العام الذي قبله (15) طالبا . أحسب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في العامين

الحل /

$$\overline{X} = \frac{(\text{عدد طلاب العام القبل الماضي} \times 75) + (\text{عدد طلاب العام الماضي} \times 80)}{\text{عدد الطلاب في العامين}}$$

$$\overline{X} = \frac{(15\times75) + (20\times80)}{35} = \frac{1125 + 1600}{35}$$

$\overline{X} = \frac{2725}{35} = 77.86$ الوسط الحسابي للدرجات في العامين

(3) الجدول التالي يبين توزيع درجات الحرارة في احدى المدن خلال 90 يوما في فصل الصيف في احد الاعوام

فئات درجات الحرارة	20 –	24 –	28 –	32 –	36 –	40 –	48 – 44	المجموع
التكرار	8	10	18	23	15	9	7	90

(أ) حساب قيمة الوسط الحسابي لدرجات الحرارى
(ب) حساب قيمة الوسيط
(جـ) حساب قيمة المنوال

الحل /

	فئات درجات الحرارة	f عدد الايام	مركز الفئة (X)	(x.f)	التكرار المتجمع الصاعد
	20 –	8	22	176	8
	24 –	10	26	260	18
قبل الوسيطية	28 –	18	30	540	36
الفئة الوسيطية الفئة المنوالية	32 –	التكرار 23 fm	34	782	59
	36 –	15	38	570	74
	40 –	9	42	378	83
	48 – 44	7	46	322	90
	المجموع	90		3022	

(أ) الوسط الحسابي $\overline{X} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} = \frac{3028}{90} = 33.64$

(ب) حساب قيمة الوسيط

طول الفئة $W = 36 - 32 = 4$ ، ترتيب الوسيط $= \frac{\sum f}{2} = \frac{90}{2} = 45$

الوسيط $ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_b}{f_m} \times W = 32 + \frac{45-36}{23} \times 4 = 33.6$ ،

(جـ) حساب قيمة المنوال

$d_1 = 23 - 18 = 5$, $d_2 = 23 - 15 = 8$

المنوال $MO = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times W = 32 + \frac{5}{5+8} \times 4 = 33.6$

مقاييس التشتت

مقاييس التشتت / ان درجة التباعد أو التقارب بين البيانات تسمى تشتتا، وتستخدم مقاييس التشتت في المقارنة بين مجموعات البيانات من حيث تشتتها.

كلما قل تشتت البيانات ← كلما اقتربت من متوسطها ← كلما كانت اقرب للتجانس

مثال 14/ (كتاب) ان الوسط الحسابي للاعداد 30 , 40 , 50 , 60 , 70 هو 50

والوسط الحسابي للاعداد 10 , 20 , 90 , 100 هو 55

الحل / الوسط الحسابي للاعداد $50 = \frac{250}{5} = \frac{70+60+50+40+30}{5} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} = \overline{X}$

الوسط الحسابي للاعداد $55 = \frac{220}{5} = \frac{100+90+20+10}{4} = \frac{\sum x_2 f_2}{\sum f_2} = \overline{X}$

نشاهد اعداد المجموعة الاولى ان تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل **والسبب** كلما كانت **اقرب** الى التجانس كلما **قل التشتت**

ونشاهد اعداد المجموعة الثانية ان تشتتها عن الوسط الحسابي **كبير**

المدى/ الفرق بين اعلى قيمة واصغر قيمة في البيانات 1+

اما في التوزيعات التكرارية / فيعرف على انه الفرق بين الحد الاعلى للفئة الاخيرة والحد الادنى للفئة الاولى

المقياس الاول = المدى

المقياس الثاني = الانحراف المعياري

المدى/ هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغير 1+ والمدى ليس مقياسا هاما للتشتت، لانه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير، وهما اكبر قيمة واقل قيمة للمتغير ولذا فهو يتاثر تاثرا بالغا بذبذبات العينة. واي تغير يحدث في اي من هاتين القيمتين يؤثر بوضوح في قيمة المدى.

مثال 15/ (كتاب) ما هو المدى في مجموعة القيم التالية ؟ 12 , 35 , 68 , 24 , 98

الحل / المدى = 98 − 12 + 1 = 87

مثال 16/ (كتاب) ما هو المدى التكراري الاتي ؟

الفئات	– 5	– 15	– 25	– 35	45 – 55
التكرار	3	8	15	14	7

الحل / المدى = 55 − 5 + 1 = 51

الانحراف المعياري / وهو اكثر مقاييس التشتت استخداما .

القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي

ويرمز له بالرمز S

حساب الانحراف المعياري لقيم غير التكرارية أو في توزيع تكراري /

(1) نستخرج الوسط الحسابي $\overline{X}$ لتلك القيم

(2) نستخرج الانحرافات لكل قيمة عن وسطها الحسابي $X - \overline{X}$

(3) نربع الانحرافات $\left(X - \overline{X}\right)^2$

(4) نجمع مربعات الانحراف $\sum\left(X - \overline{X}\right)^2$

(5) نقسم الناتج على عدد القيم $\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}$

(6) ناخذ الجذر التربيعي الموجب للناتج الاخير (فيكون هو الانحراف المعياري)

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}} \quad \text{أو} \quad S = \sqrt{\frac{\sum (x)^2}{n} - \overline{X}^2}$$

(7) اما القيم المتجمعة في توزيع تكراري فيوجد قانون اخر يمكن استخدامه وهو : $S = \sqrt{\frac{\sum f\ x^2}{\sum f} - \overline{X}^2}$

مثال 17/ (كتاب) أحسب الانحراف المعياري للقيم 23 , 28 , 24 , 29 , 32 , 21 , 25 , 34

الحل /

X	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$
23	23 – 27 = –4	16
28	28 – 27 = 1	1
24	24 – 27 = –3	9
29	29 – 27 = 2	4
32	32 – 27 = 5	25
21	21 – 27 = –6	36
25	25 – 27 = –2	4
34	34 – 27 = 7	49
$\sum x = 216$		$\sum = 144$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{216}{8} = 27$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}} \rightarrow S = \sqrt{\frac{144}{8}}$$

$$S = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S = 3 \times 1.414 = 4.242$$

مثال 18/ (كتاب) أحسب الانحراف المعياري للبيانات التالية 1 , 3 , 5 , 7 , 9

الحل / نطبق القانون التالي في ايجاد S

X	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$
1	1 − 5 = −4	16
3	3 − 5 = −2	4
5	5 − 5 = 0	0
7	7 − 5 = 2	4
9	9 − 5 = 4	16
$\sum x = 25$		$\sum (x-\overline{x})^2 = 40$

$$\overline{X} = \frac{9+7+5+3+1}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}}$$

$$S = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$S = 2 \times 1.414 = 2.83$$

مثال 19/ (كتاب) أطرح (20) من كل قيمة من القيم الموجودة في المثال (17) ثم احسب الانحراف المعياري للقيم الجديدة وقارن الناتج .

الحل / الاعداد في المثال (17) هي 23 , 28 , 24 , 29 , 32 , 21 , 25 , 34

بعد طرح (20) من كل قيمة 23 , 28 , 24 , 29 , 32 , 21 , 25 , 34

تصبح القيم 3 , 8 , 4 , 9 , 12 , 1 , 5 , 14

X	3	8	4	9	12	1	5	14	$\sum x = 56$
x^2	9	64	16	81	144	1	25	1969	$\sum x^2 = 536$

X	x^2
23 − 20 = 3	9
28 − 20 = 8	64
24 − 20 = 4	16
29 − 20 = 9	81
32 − 20 = 12	144
21 − 20 = 1	1
25 − 20 = 5	25
34 − 20 = 14	196
$\sum x = 56$	$\sum x^2 = 536$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{56}{8} = 7 \text{ ,}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x)^2}{n} - \overline{X}^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{536}{8} - (7)^2} = \sqrt{67-49} =$$

$$S = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ , } S = 3 \times 1.414 = 4.242$$

يلاحظ من المثالين (17) و (19)

ان قيمة الانحراف المعياري فيهما متساويان

ومن هذا نستنتج ان طرح كمية ثابتة من جميع القيم لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري

مثال 20/ (كتاب) أحسب الانحراف المعياري من الجدول التكراري الاتي :

الفئات	– 15	– 25	– 35	– 45	– 55	– 65	85 – 75
التكرار	6	12	18	24	20	12	8

الحل / نوجد مركز كل فئة

الفئات	التكرار f	مراكز الفئات X	(X.f)	(X^2.f)
– 15	6	$20 = \frac{40}{2} = \frac{15+25}{2}$	20 x 6 = 120	400 x 6 = 2400
– 25	12	$30 = \frac{60}{2} = \frac{25+35}{2}$	30 x 12 = 360	900 x 12 = 10800
– 35	18	$40 = \frac{80}{2} = \frac{45+35}{2}$	40 x 18 = 720	1600 x 18 = 28800
– 45	24	$50 = \frac{100}{2} = \frac{55+45}{2}$	50 x 24 = 1200	2500 x 24 = 60000
– 55	20	$60 = \frac{120}{2} = \frac{65+55}{2}$	60 x 20 = 1200	3600 x 20 = 72000
– 65	12	$70 = \frac{140}{2} = \frac{75+65}{2}$	70 x 12 = 840	4900 x 12 = 58800
85 – 75	8	$80 = \frac{160}{2} = \frac{75+85}{2}$	80 x 8 = 640	6400 x 8 = 51200
المجموع	$\sum f = 100$		$\sum xf = 5080$	$\sum x^2 f = 284000$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{5080}{100} = 50.8 \qquad S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\overline{x}\right)^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{284000}{100} - (50.8)^2} = \sqrt{2840 - 2580.64} = \sqrt{259.36} = 16.1$$

مثال 21/ (كتاب) أحسب الانحراف المعياري لأعمار مجموعة من الاشخاص

الفئات	– 12	– 22	– 32	– 42	– 52	72 – 62
عدد الاشخاص	3	5	8	4	2	1

الحل /

الفئات	f	x	(x.f)	$(x^2.f)$
– 12	3	$17 = \frac{34}{2} = \frac{12+22}{2}$	17 x 3 = 51	289 x 3 = 867
– 22	5	$27 = \frac{54}{2} = \frac{22+32}{2}$	27 x 5 = 135	729 x 5 = 3645
– 32	8	$37 = \frac{74}{2} = \frac{32+42}{2}$	37 x 8 = 296	1369 x 8 = 10952
– 42	4	$47 = \frac{94}{2} = \frac{42+52}{2}$	47 x 4 = 188	2209 x 4 = 60000
– 52	2	$57 = \frac{114}{2} = \frac{52+62}{2}$	57 x 2 = 114	3249 x 2 = 6498
72 – 62	1	$67 = \frac{134}{2} = \frac{62+72}{2}$	67 x 1 = 67	4489 x 1 = 4489
المجموع	$\sum f = 23$		$\sum xf = 851$	$\sum x^2 f = 35287$

$$S = \sqrt{\frac{35287}{23} - \left(\frac{851}{23}\right)^2} = \sqrt{165.2174} = 12.85$$ تقريبا

مثال (اثرائي) أحسب الانحراف المعياري للقيم 5 , 4 , 1 , 2 , 3

الحل / نجد الوسط الحسابي وكالتالي /

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{3+2+1+4+5}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{15}{5} = 3$$

نطبق القانون التالي في ايجاد S

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}}$$

$$S = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.8$$

x	$(x-\overline{x})$	$(x-\overline{x})^2$
3	3 – 3 = 0	0
2	2 – 3 = –1	1
1	1 – 3 = –2	4
4	4 – 3 = 1	1
5	5 – 3 = 2	4
$\sum x = 15$		$\sum (x-\overline{x})^2 = 10$

تمارين (2 - 5)

(1) أوجد المدى للقيم التالية:

3 , 0 , 8 , 7 , 9 , 12

الحل / المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة +1

$12 - 0 + 1 = 13$

(2) عرف الانحراف المعياري **الحل /** الانحراف المعياري / وهو اكثر مقاييس التشتت استخداما . ويرمز له بالرمز S

القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي

(3) أحسب الانحراف المعياري للقيم التالية: 10 , 8 , 6 , 4 , 2

الحل / نوجد مركز كل فئة

X	x^2	
2	4	
4	16	
6	36	
8	64	
10	100	
30	220	المجموع

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \overline{X}^2} \quad S = \sqrt{\frac{220}{5} - (6)^2}$$

$$S = \sqrt{44 - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(4) الجدول التالي يبين توزيع مجموعة الطلاب حسب اوزانهم . احسب الانحراف المعياري:

الفئات	20 –	22 –	24 –	26 –	28 –	32 – 30
التكرار	5	10	20	10	5	2

الحل /

الفئات	f	مركز الفئة X	(x.f)	$(x^2.f)$
20 –	5	$21 = \frac{42}{2} = \frac{20+22}{2}$	21 x 5 = 105	441 x 5 = 2205
22 –	10	$23 = \frac{46}{2} = \frac{22+24}{2}$	23 x 10 = 230	529 x 10 = 5290
24 –	20	$25 = \frac{50}{2} = \frac{24+26}{2}$	25 x 20 = 500	625 x 20 = 12500
26 –	10	$27 = \frac{54}{2} = \frac{26+28}{2}$	27 x 10 = 270	729 x 10 = 7290
28 –	5	$29 = \frac{58}{2} = \frac{28+30}{2}$	29 x 5 = 145	841 x 5 = 4205
32 – 30	2	$31 = \frac{62}{2} = \frac{30+32}{2}$	31 x 2 = 62	961 x 2 = 1922
المجموع	$\sum f = 52$		$\sum xf = 1312$	$\sum x^2 f = 33412$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1312}{25} = 25.2$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{n} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{33412}{52} - (25.2)^2} = \sqrt{4.67} = 2.73$$

(5) أضف العدد (5) الى كل من الاعداد الاتية: 3 , 6 , 2 , 1 , 7 , 5
ثم اثبت ان هذه الاضافة لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري ولكنها تؤثر على قيمة الوسط الحسابي

الحل / الاعداد قبل الاضافة في السؤال 3 , 6 , 2 , 1 , 7 , 5
الاعداد بعد الاضافة 8 , 11 , 7 , 6 , 12 , 10

x_1	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
5	5 − 4 = 1	1
7	7 − 4 = 3	9
1	1 − 4 = −3	9
2	2 − 4 = −2	4
6	6 − 4 = 2	4
3	3 − 4 = −1	1
$\sum x_1=24$		$\sum(x-\bar{x})^2=28$

x_2	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
10	10 − 9 = 1	1
12	12 − 9 = 3	9
6	6 − 9 = −3	9
7	7 − 9 = −2	4
11	11 − 9 = 2	4
8	8 − 9 = −1	1
$\sum x_2=54$		$\sum(x-\bar{x})^2=28$

$$\bar{X}=\frac{\sum x_1}{n}=\frac{24}{6}=4 \qquad \bar{X}=\frac{\sum x_2}{n}=\frac{54}{6}=9$$

$$S_1=\sqrt{\frac{\sum(x_1-\bar{x}_1)^2}{n}}=\sqrt{\frac{28}{6}}=\sqrt{4.67}=2.16$$

$$S_2=\sqrt{\frac{\sum(x_2-\bar{x}_2)^2}{n}}=\sqrt{\frac{28}{6}}=\sqrt{4.67}=2.16$$

نلاحظ ان الانحراف المعياري متساوي رغم الاضافة للقيم
اما الوسط الحسابي فهو غير متساوي عند اضافة القيم

مثال (خارجي) أحسب الانحراف المعياري للقيم 12 , 6 , 8 , 5 , 7 , 4

الحل /

$$\bar{X}=\frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{X}=\frac{4+7+5+8+6+12}{6}$$

$$\bar{X}=\frac{42}{6}=7$$

نطبق القانون التالي في ايجاد S

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$$

$$S=\sqrt{\frac{40}{6}}=6.7$$

x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
4	4 − 7 = −3	9
7	7 − 7 = 0	0
5	5 − 7 = −2	4
8	8 − 7 = 1	1
6	6 − 7 = −1	1
12	12 − 7 = 5	25
$\sum x=42$		$\sum(x-\bar{x})^2=40$

الارتباط

الارتباط / هو علاقة رياضية بين متغيرين ، بحيث اذا تغير أحدهما باتجاه معين يميل الاخر الى التغير في اتجاه معين ايضا . فاذا كان التغير في الحالتين باتجاه واحد سمي الارتباط طرديا ، اما اذا كان باتجاهين متعاكسين سمي التغير عكسيا ويرمز له بالرمز r

معامل الارتباط الخطي (بيرسون) / وهو مقياس لقوة الارتباط بين ظاهرتين y , x ويحسب بإحدى الصيغتين التاليتين :

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{S_x \cdot S_y} \quad , \quad r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x\cdot y)-(\bar{x}\cdot\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

حيث $\bar{x}$ = الوسط الحسابي للظاهرة x ، $\bar{y}$ = الوسط الحسابي للظاهرة y

S_x = الانحراف المعياري للظاهرة x ، S_y = الانحراف المعياري للظاهرة y

لحساب معامل الارتباط يلزمنا الحصول على

(أ) الوسط الحسابي لكل من الظاهرتين y , x

(ب) الانحراف المعياري لكل من الظاهرتين y , x

(جـ) مجموع حواصل ضرب الظاهرتين . اي ان $\sum xy$ او $\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$

والتعويض في احد القانونين السابقين

بعض خصائص معامل الارتباط

(1) تكون r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب)
(2) تكون r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب)
(3) قيمة r تساوي صفر 0 في حالة إنعدام الارتباط
(4) قيمة r تساوي 1+ في حالة الارتباط الطردي (التام)
(5) قيمة r تساوي 1− في حالة الارتباط العكسي (التام)

اذا كانت قيمة معامل الارتباط محصورة بين 1+ , 1− كان الارتباط قوي .
اما اذا كان معامل الارتباط = صفر فان الارتباط ينعدم تماما .

مثال 22/ (كتاب) أفرض أن x , y الموضحة في الجدول التالي تمثل قيم ظاهرتين المطلوب معرفة الارتباط بينهما .

x	3	2	1	4	5
y	2	4	6	8	10

الحل /

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$
3	2	9	4	6
2	4	4	16	8
1	6	1	36	6
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
$\sum x=15$	$\sum y=30$	$\sum x^2=55$	$\sum y^2=220$	$\sum xy=102$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15}{5} = 3 \quad , \quad \overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x)^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{5} \times 55\right) - 9} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y)^2}{n} - \overline{y}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{5} \times 220\right) - 36}$$

$$= \sqrt{44 - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum (x \cdot y) - (\overline{x} \cdot \overline{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{5} \times 102 - (3 \times 6)}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{102}{5} - 18}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{20.4 - 18}{4} = \frac{2.4}{4} = 0.6$$

$\therefore r = 0.6$ ∴ الاتباط بين الظاهرتين طردي ولكنه ليس قوي بل فوق المتوسط

مثال 23/ (كتاب) جد معامل الارتباط بين المتغير x , y من الجدول الاتي :

x	2	3	4	5	6
y	4	6	8	10	12

الحل / نحسب الوسط الحسابي لكل من المتغيرين

x	y	x · y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
2	4	8	2 − 4 = −2	4 − 8 = −4	4	16	8
3	6	18	3 − 4 = −1	6 − 8 = −2	1	4	2
4	8	32	4 − 4 = 0	8 − 8 = 0	0	0	0
5	10	50	5 − 4 = 1	10 − 8 = 2	1	4	2
6	12	72	6 − 4 = 2	12 − 8 = 4	4	16	8
$\sum$=20	$\sum$=40	$\sum$=180			$\sum$=10	$\sum$=40	$\sum$=20

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{20}{5} = 4 \quad , \quad \overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{5}\times 20}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = 2\sqrt{2}$$

طريقة ثانية للحل /

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{20}{5} = 4 \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x)^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{5}\times 90\right) - 16} = \sqrt{18-16} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y)^2}{n} - \bar{y}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{5}\times 360\right) - 64}$$

$$= \sqrt{72-64} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x\cdot y) - (\bar{x}\cdot\bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{5}\times 180 - (4\times 8)}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{180}{5} - 32}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{36-32}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$\therefore r = 1$ ∴ الارتباط طردي تام

تمارين (3 - 5)

(1) جد معامل الارتباط بين قيم الظاهرتين y , x من البيانات التالية :

X	1	2	3
y	2	4	6

الحل /

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
$\sum x=6$	$\sum y=12$	$\sum x^2=14$	$\sum y^2=56$	$\sum xy=28$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6}{3} = 2 \quad , \quad \overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x)^2}{n} - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times (14) - (2)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3} \times 14\right) - 4} = \sqrt{\frac{14}{3} - \frac{4}{1}} = \sqrt{\frac{14}{3} - \frac{4 \times 3}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{14}{3} - \frac{12}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y)^2}{n} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 56 - (4)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3} \times 56\right) - 16} = \sqrt{\frac{56}{3} - \frac{16}{1}} = \sqrt{\frac{56}{3} - \frac{16 \times 3}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{56}{3} - \frac{48}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x \cdot y) - (\overline{x} \cdot \overline{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{3} \times 28 - (2 \times 4)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{28-24}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$$

$\therefore r = 1$ ∴ الارتباط طردي تام

---

(2) في الجدول المبين في السؤال الاول لو ضربت قيم الظاهرة X في 4
نحصل على جدوا خر وهو :
جد معامل الارتباط وقارن النتيجة مع السؤال الاول

X	4	8	12
y	2	4	6

الحل /

x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 \cdot y_1$
1	2	1	4	6
2	4	4	16	8
3	6	9	36	6
$\sum=6$	$\sum=12$	$\sum=14$	$\sum=56$	$\sum=28$

x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	$x_2 \cdot y_2$
4	2	16	4	8
8	4	64	16	32
12	6	144	36	72
$\sum=24$	$\sum=12$	$\sum=224$	$\sum=56$	$\sum=112$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_2}{n} = \frac{24}{3} = 8 \quad , \quad \overline{y} = \frac{\sum y_2}{n} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_2)^2}{n} - (\overline{x_2})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times (224) - (8)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3} \times 224\right) - 64} = \sqrt{\frac{224}{3} - \frac{64}{1}} = \sqrt{\frac{224}{3} - \frac{64 \times 3}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{224}{3} - \frac{192}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y_2)^2}{n} - \overline{y_2}^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 56 - (4)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3} \times 56\right) - 16} = \sqrt{\frac{56}{3} - \frac{16}{1}} = \sqrt{\frac{56}{3} - \frac{16 \times 3}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{56}{3} - \frac{48}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x \cdot y) - (\overline{x} \cdot \overline{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{3} \times 112 - (8 \times 4)}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{112-96}{3}}{\frac{16}{3}} = \frac{16}{3} \times \frac{3}{16} = 1$$

$\therefore\ r = 1$ ∴ الاتباط طردي تام

---

(3) جد معامل الارتباط في الجدول التالي :

X	2	4	6	8	10
y	1	2	3	4	5

الحل /

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$
2	1	4	1	2
4	2	16	4	8
6	3	36	9	18
8	4	64	16	32
10	5	100	25	50
$\sum x=30$	$\sum y=15$	$\sum x^2=220$	$\sum y^2=55$	$\sum xy=110$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6 \quad , \quad \overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x)^2}{n} - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times (220) - (6)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{5} \times 220\right) - 36} = \sqrt{\frac{220}{5} - \frac{36}{1}} = \sqrt{\frac{220}{5} - \frac{36 \times 5}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{220}{5} - \frac{180}{5}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y)^2}{n} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 55 - (3)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{5} \times 55\right) - 9} = \sqrt{\frac{55}{5} - 9} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum (x \cdot y) - (\overline{x} \cdot \overline{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{5} \times 110 - (6 \times 3)}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{22 - 18}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1$$

$\therefore$ r = 1 ∴ الاتباط طردي تام